O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA JUSTIFICATIVA DO DESABAMENTO DA PONTE TACOMA NARROWS

Roberto A. L. SOARES[a] ,**Fernando R. BARBOSA**[b]

[a,b]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI

Praça da Liberdade, 1597, Centro, Teresina - PI

e-mail:[a] robertoarruda@ifpi.edu.br; [b] f.rocha.b@hotmail.com

RESUMO

O desmoronamento da ponte suspensa Tacoma Narrows em 1940 fomentou pesquisas sobre a causa do colapso causado pela força do vento que provocava grandes oscilações verticais no seu leito. Também promoveu estudos mais avançados sobre o comportamento de pontes e outras edificações sob influência de forças externas. Estudos realizados na época mostraram que o desmoronamento foi provocado por um fenômeno linear, a ressonância. Porém pesquisas mais recentes afirmam que as causas foram por efeitos não-lineares. O presente trabalho pretende apresentar as justificativas de tais hipóteses, assim como uma análise de um modelo simplificado desta última.

Palavras-chaves: oscilações, ressonância, modelo não-linear.

INTRODUÇÃO

Tacoma Narrows foi o nome dado a uma ponte construída no verão de 1940, localizada no estreito de Tacoma da cidade de Washington – EUA. No dia 7 de novembro, quatro meses após sua inauguração, a ponte desabou devido as oscilações provocadas pelo vento. A partir daí, diversas foram as suposições sobre as causas do desmoronamento. A primeira hipótese, de efeito linear, a ressonância induzida pelos ventos que ao colidirem com a estrutura acontecia o fenômeno de von Karmán ou vórtices de von Karmán [1]. Através deste fenômeno, afirmava-se que o vento era separado pela parte lateral da ponte que acarreta a formação de vórtices na parte contrária a incidência, implicando força na direção vertical com a mesma frequência das produzidas pela ponte. Esta hipótese foi descartada em dezembro de 1990, por Lazer e McKenna [2] com o artigo publicado “Large-Amplitude Periodic oscillations in Suspension Bridges: Some New Connections with Nonlinear Analysis”. No trabalho se ressalta que as causas do colapso não poderiam ser provocadas por ressonância devido a inconstância das forças externas, e sustentaram a hipótese de que a torção que esticava e comprimia os cabos existentes na estrutura da ponte eram promovidas por fenômenos não-lineares.

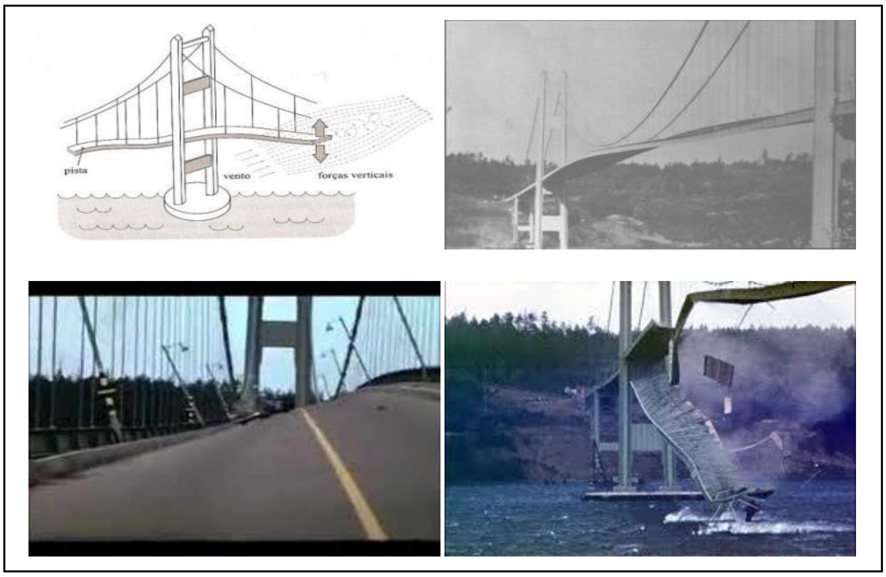

Figura 1: Esquema e fotos das oscilações provocadas pelo vento que culminaram no desabamento da Ponte Tacoma narrows.

MOVIMENTO FORÇADO NÃO AMORTECIDO E RESSONÂNCIA

Um modelo que representa um movimento forçado não amortecido num sistema massa-mola é dado pela Equação 1 diferencial ordinária linear não homogênea:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 sen\gamma t \qquad \text{Eq. 1}$$

Onde F_0 é uma constante, $\omega^2 = \frac{k}{m}, \lambda = \frac{\beta}{2m}$, k (constante da mola), m (massa conectada), β (constante de amortecimento) e $\omega \neq \gamma$.

Desta forma, a solução da **Eq. 1** de problema inicial, x(0) = 0 e x'(0) = 0, é dada por:

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}(-\gamma sen\omega t + \omega sen\gamma t).$$

Agora, aplica-se um processo que permita coincidir a frequência de força externa $\left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)$ com a frequência da vibração livre $\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$. Assim, aplicando a regra de L'Hôpital para calcular x(t) quando $\gamma \to \omega$, temos:

$$x(t) = \frac{F_0}{2\omega^2} sen\omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t.$$

Observe que esta solução atende as condições iniciais dada no problema original. Além disso, verifica-se que:

$$|x(t_n)| \to \infty \ , \ t_n = \frac{n\pi}{\omega}, n = 1,2,...$$

conforme apresenta a Figura 2. Este fenômeno é conhecido como ressonância pura que pode provocar grandes amplitudes de vibrações e provocar colapso como o ocorrido na Ponte Tacoma Narrows.

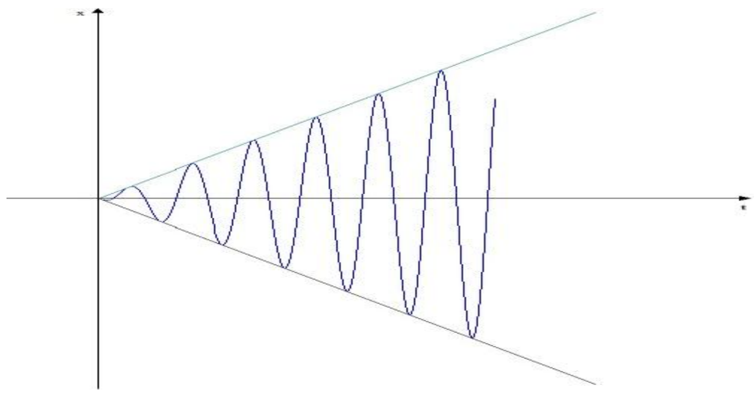

Figura 2: Amplitude vibracional provocada por ressonância.

MODELO NÃO-LINEAR SIMPLIFICADO

Um modelo não-linear simplificado apresentado por Dennis G. Zill [3] e similar ao modelo de Lazer e McKenna será mostrado a seguir. Considere um cabo vertical de uma ponte suspensa de tal forma que se comporte como uma mola, mas com características distintas sob tensão e compressão. Quando alongado, age como uma mola com constante de Hooke **b**, e quando comprimido, com uma constante de Hooke **a**. Suponha também que $0 < a < b$.

Seja **x(t)** a deflexão vertical da parte da pista ligada a esse cabo e com o sentido positivo para baixo, onde t representa o tempo e x = 0 representa a posição de equilíbrio. Com a oscilação da pista provocada pelos vórtices de von Karman, o cabo responde com uma força restauradora para cima **bx** quando $x \geq 0$ e uma força restauradora para baixo igual a **ax** quando $x < 0$. Na ausência de amortecimento, um modelo não-linear para o movimento forçado é dado pela Equação 2:

$$mx'' + F(x) = g(t), \qquad \text{Eq. 2}$$

onde F(x) é definida por partes: $F(x) = \begin{cases} bx, x \geq 0 \\ ax, x < 0 \end{cases}$

g(t) é a força aplicada e **m** é a massa da seção da pista. A **Eq. 2** é linear para $x \geq 0$ou $x < 0$. Vejamos as soluções gráficas (Figuras 3 e 4) para m = 1, b = 4, a = 1 e g(t) = sen4t e com a pista inicialmente na posição de equilíbrio com velocidades iniciais 1 e 2, respectivamente:

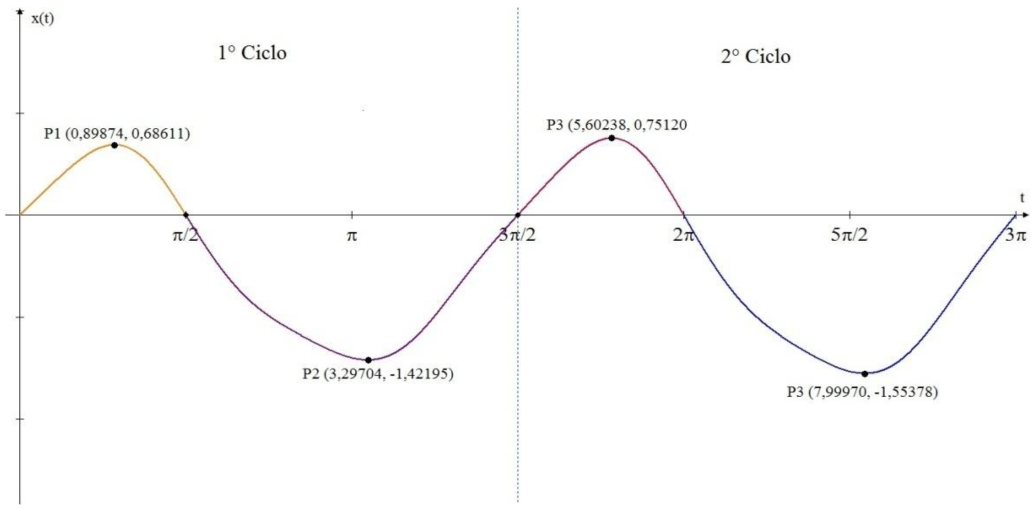

Figura 3: Representação gráfica da solução da Eq. 2 para velocidade inicial igual a 1.

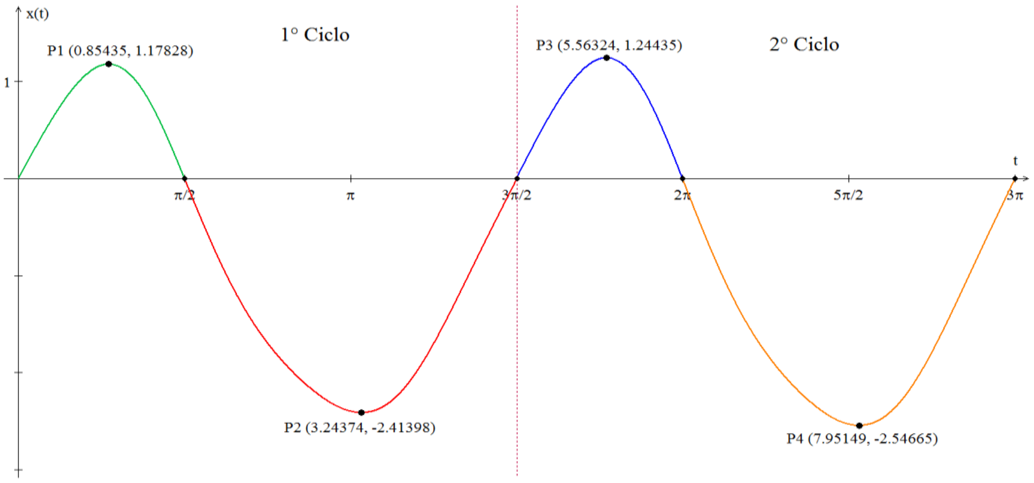

Figura 4: Representação gráfica da solução da Eq. 2 para velocidade inicial igual a 2.

Como se pode observar nos dois gráficos, a amplitude da deflexão vertical é maior para x < 0 e ambas aumentam a cada ciclo. Também se observa uma maior amplitude com a velocidade inicial também maior. Isto pode justificar o colapso da Ponte Tacoma, pois dia da queda se conferiu ventos com velocidade de até 70km/h, sendo que a média era bem menor. Esta incidência pode ter forçado os cabos da ponte além de sua capacidade de elasticidade e provocado o rompimento.

CONCLUSÕES

De acordo com o exposto, verifica-se que as hipóteses das causas do desmoronamento da Ponte Tacoma Narrows são fundamentadas e justificadas em estudos envolvendo equações diferencias, sendo a causa de efeitos não-lineares a mais consistente devido a análise mais realística dos fenômenos envolvidos. Destaca-se também a fundamental a importância das equações diferenciais na solução de diversos problemas reais.

REFERÊNCIAS

[1] TEIXEIRA, O. P. B.; CINDRA, J. L.; MONTEIRO, M. A. A.; AMARANTE, A. R. S. Mecânica dos Fluidos: algumas considerações sobre a viscosidade. In: XVI Simpósio Nacional de Ensino de Física, 2005, Rio de Janeiro. Resumos do XVI SNEF, 2005, v. único: p. 171 – 171.

[2] LAZER, A. C.; McKENNA, P. J. Large-Amplitude Periodic Oscillantions in Suspension Bribges: Some New Connections with Nonlinear Analysis. SIAM, Filadélfia. Vol. 32, n. 4, p. 537578, dez, 1990.

[3] ZILL, Dennis G. Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.