



## **Análise da convecção forçada laminar de um fluido não newtoniano do tipo pseudoplástico via GITT**

**Jean Pierre Veronese<sup>1</sup>, Samuel Alves da Silva<sup>2</sup>, Carlo Reillen Martins<sup>3</sup>, Danielly Vieira de Lucena<sup>4</sup>, Jacques César dos Santos<sup>5</sup>**

<sup>1</sup>Doutor – IFPB, Campus Cajazeiras. e-mail: jpveronese@hotmail.com

<sup>2</sup>Mestre – IFPB, Campus Cajazeiras. e-mail: Samuel@ifpb.edu.br

<sup>3</sup>Mestre – IFPB, Campus Cajazeiras. e-mail: reillen@gmail.com

<sup>4</sup>Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Materiais da UFCG. e-mail: daniellymateriais@yahoo.com.br

<sup>5</sup>Doutor – UFPB. e-mail: jaquesles@yahoo.com.br

**Resumo:** No presente trabalho é estudada a convecção forçada no escoamento em desenvolvimento de um fluido do tipo pseudoplástico situado em um canal de placas planas paralelas com uma variação senoidal na temperatura de entrada. A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é utilizada para fornecer uma solução híbrida -analítico-numérica da equação da energia que está sujeita a uma condição de contorno do 5º. tipo, no qual considera os efeitos convectivos da parede. São apresentados resultados da temperatura do fluido ao longo da linha central e comparados com os resultados publicados anteriormente por Cheroto (1998).

**Palavras-chave:** Convecção forçada, fluido não newtoniano, GITT, lei de potência, pseudoplástico

### **1. INTRODUÇÃO**

Os fluidos não newtonianos possuem um comportamento não-linear e não são adequadamente descritos pelas teorias clássicas da mecânica dos fluidos. A necessidade crescente da formulação de modelos e de métodos de cálculo capazes de auxiliar o estudo destes materiais levou a uma evolução na teoria da dinâmica dos fluidos, desenvolvendo assim uma análise para os fluidos com comportamento dinâmico diferenciado. Exemplos típicos de substâncias com comportamentos não-newtonianos são: suspensões de sólidos em líquidos, polímeros, emulsões, materiais em processamento com propriedades visco-elástico, borrachas, plásticos, fibras sintéticas, petróleo, detergente e sabão, fluidos biológicos e farmacêuticos, alimentos, operações no campo de óleos, tintas. São muito utilizados nas indústrias siderúrgica, petroquímica, nuclear e aeroespacial entre outros.

Devido à necessidade cada vez maior de soluções exatas em curto intervalo de tempo, as técnicas de aproximação numérica vêm ganhando espaço sobre a experimentação e aos métodos analíticos clássicos. Isto ocorre, pois a experimentação é quase sempre demorada, dispendiosa e os gastos com aquisição e aferição de equipamentos são enormes para cada nova situação e os métodos analíticos clássicos apresentam certas limitações.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), presente neste trabalho, é conhecida como um método utilizado na solução e manipulação de certas classes de problemas difusivos de calor e massa. A idéia básica consiste em transformar um sistema de equações diferenciais parciais original em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias, através da eliminação de dependências espaciais, onde esses podem ser resolvidos de maneira mais simples, com a vantagem de produzir uma solução mais acurada e mais econômica além de permitir um controle sobre o erro relativo dos resultados.

O principal objetivo deste trabalho é resolver as equações da camada limite para o problema da convecção forçada de um fluido não-newtoniano do tipo pseudoplástico, em um canal de placas planas paralelas, no escoamento com condição de entrada periódica pela aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) na equação da energia. O presente trabalho pode ser inserido no contexto dos problemas de convecção forçada, sendo considerado uma extensão dos trabalhos realizados por: Cheroto (1998), Santos (2002), Veronese (2002) e outros; na resolução das

equações da camada limite através da Técnica da Transformada Integral Generalizada, obtendo dados de interesse prático tais como a temperatura do fluido ao longo da linha central do duto.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Consideremos a convecção forçada, com o perfil de velocidade completamente desenvolvido, em um escoamento laminar de um fluido não-newtoniano em um canal de placas paralelas. A equação da energia esta sujeita a uma condição de contorno do 5º tipo, a qual considera os efeitos da convecção externa e da capacitância térmica da parede. As hipótese para a formulação matemática são: escoamento laminar, fluido incompressível e bidimensional. Não será considerado os efeitos de dissipação viscosa, e as propriedades físicas serão mantidas constantes. O problema proposto pode ser representado pelas equações abaixo:

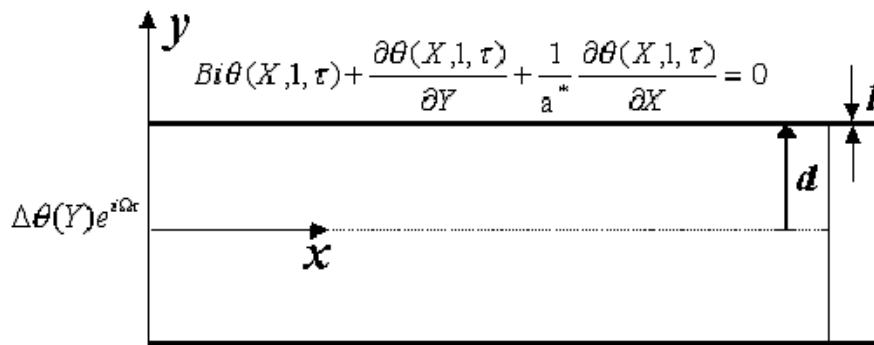


Figura 1 – Definição do problema proposto

Equação da energia e condições de contorno:

$$\frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial \tau} + U_{\infty} \frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial X} = \frac{\partial^2 \theta(X, Y, \tau)}{\partial Y^2}; \quad 0 < Y < 1 \text{ e } x > 0 \quad (1.a)$$

$$\theta(0, Y, \tau) = \Delta \theta(Y) e^{i \Omega \tau}; \quad 0 \leq Y \leq 1 \text{ e } \tau > 0 \quad (1.b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y}(X, 0, \tau) = 0; \quad x > 0 \text{ e } \tau > 0 \quad (1.c)$$

$$Bi \theta(X, 1, \tau) + \frac{\partial \theta(X, 1, \tau)}{\partial Y} + \frac{1}{a^*} \frac{\partial \theta(X, 1, \tau)}{\partial X} = 0; \quad x > 0 \text{ e } \tau > 0 \quad (1.d)$$

Foram utilizados os seguintes grupos adimensionais:

$$Y = \frac{y}{d} \quad \Omega = \frac{\beta d^2}{\alpha} \quad a^* = \frac{(\rho c)_f}{(\rho c)_w} \frac{d}{l} \quad \theta = \frac{T - T_{\infty}}{\Delta T_c} \quad \Delta \theta = \frac{\Delta T}{\Delta T_c} \quad Bi = \frac{h_e d}{k_f} \quad \tau = \frac{\alpha t}{d^2} \quad (2a-i)$$

Utilizaremos o modelo lei do potência, para o fluido não newtoniano no termo de velocidade completamente desenvolvido.



$$U_{\infty}(Y) = \frac{2n+1}{n+1} \left( 1 - Y^{\frac{n+1}{n}} \right) \quad (2.j)$$

Quando  $n = 1$ , a equação acima se reduz ao modelo newtoniano. Os fluídos em que  $n < 1$  são chamados de pseudoplásticos ; os exemplos incluem as soluções polímeras, suspensões coloidais e polpa de papel em água. Se  $n > 1$  o fluído é chamado de dilatante; os exemplos incluem as suspensões de amido e areia. Para este trabalho será utilizado  $n \leq 1$ .

## 2.1 Solução Periódica

Como só nos interessa a solução periódica para tempos longos, pode-se assumir então como solução a seguinte expressão abaixo, facilitando a resolução do problema. A formulação é escrita para grandes valores de tempo com a superposição de um problema instável e um problema estável.

$$\theta(X, Y, \tau) = \bar{\theta}(X, Y) \exp(i, \Omega, \tau) \quad (3)$$

Substituindo a equação acima na Eq. (2), temos:

$$i\Omega \bar{\theta}(X, Y) + U_{\infty} \frac{\partial \bar{\theta}(X, Y)}{\partial X} = \frac{\partial^2 \bar{\theta}(X, Y)}{\partial Y^2} \quad ; 0 < Y < 1 \text{ e } x > 0 \quad (4.a)$$

$$\bar{\theta}(0, Y, \tau) = \Delta \theta(Y) \quad ; \quad 0 \leq Y \leq 1 \text{ e } \tau > 0 \quad (4.b)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}(X, 0, \tau)}{\partial Y} = 0 ; Bi \bar{\theta}(X, 1, \tau) + \frac{\partial \bar{\theta}(X, 1, \tau)}{\partial Y} + \frac{1}{a^*} i\Omega \bar{\theta} = 0 ; x > 0 \text{ e } \tau > 0 \quad (4.c-d)$$

## 2.2 Solução via GITT

Problema auxiliar:

$$\frac{d^2 \Gamma_i(Y)}{dY^2} + \beta_i^2 \Gamma_i(Y) = 0 ; 0 < Y < 1 ; \quad i = 1, 2, 3... \quad (5.a)$$

Condições de contorno para o problema auxiliar:

$$\frac{d\Gamma_i(0)}{dY} = 0 \quad ; \quad \frac{d\Gamma_i(1)}{dY} + Bi\Gamma_i(1) = 0 ; \quad \tilde{\Gamma}_i(Y) = \frac{\Gamma_i(Y)}{\sqrt{M_i}} \quad (5.b-d)$$

A normalização integral,  $N_i$ , é dada por:

$$M_i = \int_0^1 \Gamma_i^2(Y) dY \quad (5.e)$$

A solução para o problema de autovalor (5.a-c) é dada por:

$$\Gamma_i(Y) = \text{Cos}(\beta_i Y) \quad ; \quad Bi \text{Cos}(\beta_i) = \text{Sen}(\beta_i) \beta_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3... \quad (5.f-g)$$

Da propriedade de ortogonalidade:



$$\int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(Y) \tilde{\Gamma}_j(Y) dY = \begin{cases} 0; i \neq j \\ 1; i = j \end{cases} \quad (5.h)$$

O par de Transformada-Inversa é dado por:

$$\bar{\theta}_i(X) = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(Y) \bar{\theta}(X, Y) dY \quad (\text{Transformada})$$

$$\bar{\theta}(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i(Y) \bar{\theta}_i(X) \quad (\text{Inversa}) \quad (6.a-b)$$

O operador integral é visualizado como:

$$\int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(Y) dY \quad (6.c)$$

Para proceder à transformação integral da Eq. (6.c) deve-se operá-la com a Eq. (4.a), resultando:

$$\int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(Y) U \frac{\partial \bar{\theta}(X, Y)}{\partial X} dY = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(Y) \frac{\partial^2 \bar{\theta}(X, Y)}{\partial Y^2} dY - \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(Y) i\Omega \bar{\theta}(X, Y) dY \quad (7.a)$$

Aplicando a expressão da inversa (6.b), o lado esquerdo da Eq. acima torna-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_j(Y) \frac{d\bar{\theta}_j(X)}{dX} \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(Y) U dy = \quad (7.b)$$

O lado direito da Eq. (7.a) será resolvido separadamente, na primeira integral usaremos o segundo teorema de Green para obtermos:

$$\int_0^1 \bar{\theta}(X, Y) \frac{d^2 \tilde{\Gamma}_i}{dY} dY + \left[ \tilde{\Gamma}_i \frac{\partial \bar{\theta}(X, Y)}{\partial Y} - \bar{\theta}(X, Y) \frac{d\tilde{\Gamma}_i(Y)}{dY} \right]_{Y=0}^{Y=1} \quad (7.c)$$

Aplicando o problema de autovalor para simplificar o restante da integral e em seguida a formula da inversa. Quando  $Y = 0$ , os termos desaparecem, logo:

$$- \beta_i^2 \int_0^1 \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i(Y) \tilde{\Gamma}_j(Y) \bar{\theta}_j(X) dY + \left[ \tilde{\Gamma}_i(1) \frac{\partial \bar{\theta}(X, 1)}{\partial Y} - \bar{\theta}(X, 1) \frac{d\tilde{\Gamma}_i(1)}{dY} \right] \quad (7.d)$$

Para continuar a transformação, as equações de contorno (4.d) e (5.c) serão necessárias e por cancelamento os termos com número de Biot (termos iguais, mas com sinais opostos) desaparecerão e a Eq. (7.c) pode ser reescrita como:

Para  $i = j$  temos:



$$= -\beta_i^2 \bar{\theta}_j(X) - i \frac{\Omega}{a} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i(1) \tilde{\Gamma}_j(1) \bar{\theta}_j(X) \quad (8)$$

Na segunda integral do lado direito da Eq. (4.21), após aplicar a fórmula da Inversa, temos:

$$i\Omega \bar{\theta}_j(X) \quad (9)$$

Reagrupando todos os termos :

$$i \frac{\Omega}{a} \tilde{\Gamma}_i(1) \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_j(1) \bar{\theta}_j(X) - \beta_i^2 \bar{\theta}_i(X) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d\bar{\theta}_j(X)}{dX} Q_{i,j} - i\Omega \bar{\theta}_j(X) = 0 \quad (10)$$

$$Q_{ij} = \int_0^1 \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i(Y) \tilde{\Gamma}_j(Y) U(Y) dY \quad (11)$$

Note que a transformação eliminou do problema a dependência em Y, agora a Eq. (10) pode ser reescrita na forma matricial:

$$Q_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(X)}{dX} = B_{ij} \bar{\theta}_j(X) \quad (12)$$

Onde:

$$B_{i,j} = -(\beta_i^2 + i\Omega\theta) \delta_{ij} - \frac{i\Omega}{a} \tilde{\Gamma}_i(1) \tilde{\Gamma}_j(1) \quad (13)$$

$$\frac{d\bar{\theta}(X)}{dX} = A \bar{\theta}; \quad A = Q_{ij}^{-1} B_{ij} \quad (14-15)$$

As condições de entrada são dadas pela Eq. (4.b) e precisam ser transformadas pelo operador da Eq. (6c):

$$\int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(Y) \bar{\theta}(0, Y) dY = \tilde{\Gamma}_i(Y) \Delta\theta(Y) dY \quad (16)$$

com

$$f_i(Y) = \tilde{\Gamma}_i(Y) \Delta\theta(Y) dY \quad (17)$$

$$\bar{\theta}(0) = f_i(Y) \quad (18)$$

finalmente o sistema transformado é definido como:

$$\frac{d\bar{\theta}(X)}{dX} = A \bar{\theta} \quad (19)$$

$$\bar{\theta}_i(0) = f_i(Y) \quad (20)$$

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir, apresenta-se a convergência da amplitude da temperatura média para diferentes índices lei de potência, com Biot = 10<sup>5</sup>. O perfil da temperatura na entrada é do tipo  $\Delta\theta(Y) = 1 - Y^2$ . A convergência é muito rápida e a posição adimensional  $X/D_h$  é dada por quatro vezes a área sob o



perímetro total, resultando em  $D_h = 20/11$ , com  $d = 0.5$  inch. Na é o número de termos utilizados na expansão. As tabelas abaixo mostram a convergência da temperatura média para os diferentes índices lei de potencia.

Tabela 1 - Convergência da temperatura média do fluido usando  $Bi = 10^5$ ,  $\Omega = 0,06491$ ,  $a^* = 5 \times 10^{-5}$ ,  $\Delta\Theta(Y) = 1 - Y^2$  e índice lei de potência = 0,15. (n = 0,15)

NA\X/D <sub>h</sub>	0,01	0,1	0,5	0,8	1,0
3	0,98219	0,817679	0,331538	0,167719	0,106484
7	0,981625	0,817817	0,331576	0,167736	0,106492
9	0,981654	0,817822	0,331574	0,167735	0,106493

Tabela 2 - Convergência da temperatura média do fluido usando  $Bi = 10^5$ ,  $\Omega = 0,06491$ ,  $a^* = 5 \times 10^{-5}$ ,  $\Delta\Theta(Y) = 1 - Y^2$  e índice lei de potência = 0,25. (n = 0,25)

NA\X/D <sub>h</sub>	0,01	0,1	0,5	0,8	1,0
3	0,983469	0,831955	0,359883	0,191045	0,125251
7	0,983299	0,832248	0,359966	0,191086	0,125277
9	0,983325	0,832252	0,359966	0,191086	0,125279

Tabela 3 - Convergência da temperatura média do fluido usando  $Bi = 10^5$ ,  $\Omega = 0,06491$ ,  $a^* = 5 \times 10^{-5}$ ,  $\Delta\Theta(Y) = 1 - Y^2$  e índice lei de potência = 0,5. (n = 0,5)

NA\X/D <sub>h</sub>	0,01	0,1	0,5	0,8	1,0
3	0,984931	0,844862	0,384492	0,211973	0,142520
7	0,984963	0,845080	0,384546	0,212000	0,142538
9	0,984978	0,845082	0,384547	0,212002	0,142539

Tabela 4 - Convergência da temperatura média do fluido usando  $Bi = 10^5$ ,  $\Omega = 0,06491$ ,  $a^* = 5 \times 10^{-5}$ ,  $\Delta\Theta(Y) = 1 - Y^2$  e índice lei de potência = 1. (n = 1)

NA\X/D <sub>h</sub>	0,01	0,1	0,5	0,8	1,0
3	0,986421	0,856064	0,405527	0,230361	0,158004
7	0,986564	0,856208	0,405575	0,230387	0,158022
9	0,986571	0,856209	0,405576	0,230387	0,158021



Tabela 5 - Comparação da temperatura média do fluido usando  $Bi = 10^5$ ,  $\Omega = 0,06491$ ,  $a^* = 5 \times 10^{-5}$ ,  $\Delta\Theta(Y) = 1 - Y^2$  e índice lei de potência = 1. ( $n = 1$ )

NA\X/D <sub>h</sub>	0,01	0,1	0,5	0,8	1,0
PRESENTE TRABALHO	0,986571	0,856209	0,405576	0,230387	0,158021
CHEROTO	0,9866	0,8562	0,4056	-	0,1580

A figura 2 mostra o comportamento da temperatura média do fluido para os diversos índices lei de potência.

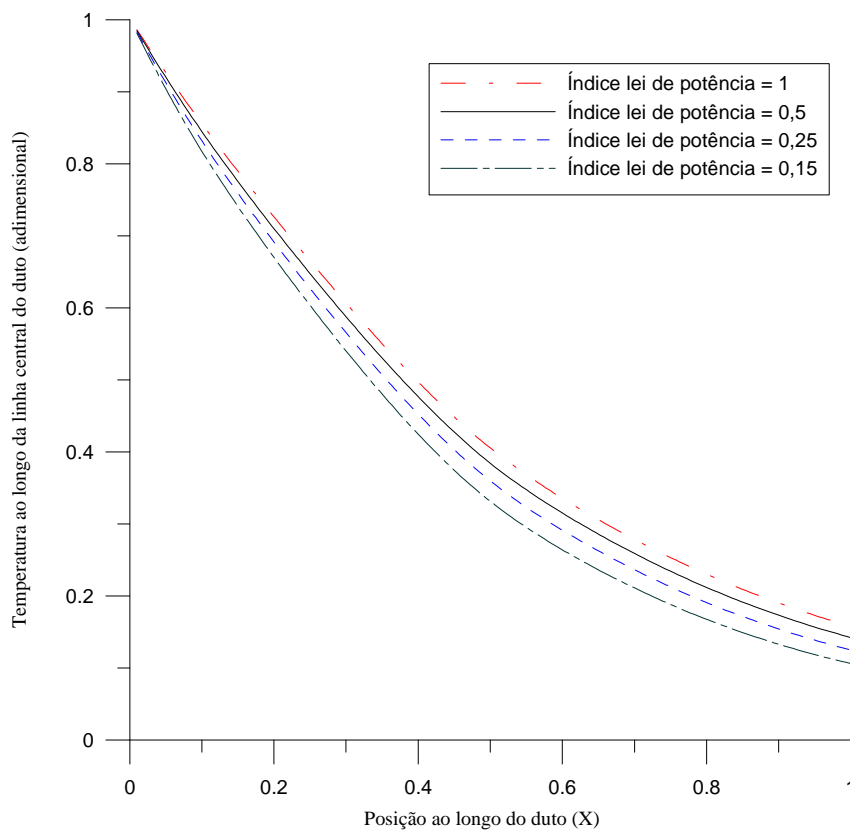


Figura 2 - Comparação da temperatura média do fluido usando  $Bi = 10^5$ ,  $\Omega = 0,06491$ ,  $a^* = 5 \times 10^{-5}$ ,  $\Delta\Theta(Y) = 1 - Y^2$  para diversos índices lei de potência.

#### 4. CONCLUSÕES

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), utilizada neste trabalho, mostrou-se muito eficiente na solução de problemas com o perfil de velocidade completamente desenvolvido, obtendo-se uma excelente concordância com os resultados obtidos por Cheroto (1998). Constatou-se que à medida que o índice lei de potência cresce a temperatura média ao longo do duto tende a aumentar, mas não de forma muito significativa, pois os valores ficaram muito próximos. Os resultados obtidos são de grande importância no estudo de fluidos com comportamento pseudoplástico, principalmente



para o setor petróleo e gás que está na busca de soluções para o campo de velocidade e temperatura para estes tipo de fluidos.

## 5.REFERÊNCIAS

- Cheroto, S., **Análise of Unsteady Forced Convection in Channels by Integral Transform Technique and Experiments**. Doctor Thesis, University of Miami, Coral Gables, FL, USA. 1998.
- Cotta, R. M., , **Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow**, CRC Press, Boca Raton, FL, EUA, 1993.
- Cotta, R. M., and Mikhailov, M. D., **Heat Conduction – Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation**, John Wiley & Sons. NY, EUA, 1997.
- Santos, J.C, **Análise Teórica de Convecção Forçada Laminar Transiente com Entrada Térmica Periódica**, Dissertação de Mestrado , Universidade Federal da Paraíba, UFPB. João Pessoa, PB, Brasil, Agosto 2002.
- Veronese, J.P., **Análise da Convecção Forçada Transiente em Canais de Placas Planas de Fluidos Não Newtoniano Usando o Modelo Lei de Potência Via G.I.T.T**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba – UFPB. João Pessoa, PB, Brasil, setembro 2002.

## NOMENCLATURA

$a^*$	Relação da capacitância térmica entre a parede e o fluido
Bi	Número de Biot
d	Metade da distância entre as placas planas paralelas, m
$D_h$	Diâmetro hidráulico
H	Coefficiente de transferência de calor
i	Número imaginário
k	Condutividade térmica do fluido, W/(mk)
l	Espessura da parede, m
$M_i$	Norma do problema de autovalor do campo de temperatura
NA	Número de autovalores
n	Índice lei de potência
Pr	Prandtl number
R	Reynolds number
$T(x,y,t)$	Distribuição de temperatura ao longo do duto, ° C
t	Tempo, s
$T(x, y, 0)$	Temperatura inicial, ° C
$U_o$	Velocidade inicial m/s
u	Componente longitudinal do campo de velocidade, m/s
U	Componente longitudinal do campo de velocidade adimensional
v	Componente transversal do campo de velocidade, m/s
V	Componente transversal do campo de velocidade
x	Variável longitudinal, m
X	Variável longitudinal adimensional
y	Coordenada normal, m

## SIMBOLOS GREGOS

$\alpha$	Difusividade térmica , $m^2 /s$
$\beta$	Frequência de entrada
$\beta_i$	Autovalor do problema auxiliar do campo de temperatura no escoamento de placas paralelas
$\Gamma_i$	Autofunção do problema auxiliar da parte real do campo de temperatura
$\nu$	Viscosidade cinemática
$\Omega$	Frequência adimensional das oscilações de entrada
$\rho$	Massa específica do fluido, $kg/m^3$
$\theta_i$	Potencial transformado para o campo de temperatura
$\theta_m$	Temperatura média adimensional da
$\theta$	Temperatura adimensional
$\tau$	Tempo adimensional
$\tau^*$	Tensão de cisalhamento
$\mu$	Viscosidade dinâmica da solução
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker

## SUBSCRITOS

- i, j, k Indica a ordem dos autovalores e funções afins
- w Indica o valor da grandeza da parede
- f Indica o valor da grandeza do fluido de trabalho
- $\infty$  Indica o valor da grandeza no escoamento completamente desenvolvido.