Resoluções de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) por Séries de Potências

Hudson Umbelino dos Anjos[1], Julia de Paula Borges[2]

[1]Mestre em Matemática – IFTO. e-mail: hudsonanjos@ifto.edu.br
[2]Graduanda em Matemática - IFTO. Bolsistas do IFTO. e-mail: matematica_julial@yahoo.com.br

Resumo: As equações diferenciais são de importância fundamental na matemática e em suas aplicações em engenharia, visto que são usadas para expressar matematicamente diversas relações e leis físicas. Estudamos a resolução de EDOs por meio de séries de potências, utilizando uma soma parcial dessas séries para o cálculo de valores da solução obtida, obtenção de um esboço da curva solução com o auxílio do sistema de álgebra computacional Maxima e comparando com a solução exata quando possível.

Palavras–chave: edo, solução, série de potência

1. INTRODUÇÃO

Um bom conhecimento dos resultados clássicos da teoria das equações diferenciais ordinárias, assim como uma boa noção de suas aplicações mais frequentes, é imprescindível para um aluno de graduação em Matemática, ou área afim, que se propõe a ter uma boa trajetória na pesquisa em Ciências Exatas e da Terra, e mesmo em outras áreas da Ciência. Assim o estudo das equações diferenciais tem sido a porta de entrada à pesquisa para muitos matemáticos devido a sua aplicabilidade em diversos ramos da ciência. Nosso intuito foi estudar os resultados básicos da teoria das equações diferenciais ordinárias (EDOs), dando ênfase à resolução de EDOs por meio de séries e aplicações. Por sua vez a solução de um problema não é apenas uma fórmula, uma função ou uma equação, mas algo cheio de significado e de informações sobre o fenômeno que estamos considerando.

Nosso objetivo foi estudar as Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações, especificamente a obtenção de soluções por meio de séries. Estudamos as EDOs de primeira e segunda ordem para depois nos dedicarmos às soluções por séries. Uma vez que a componente curricular que introduz as equações diferenciais no curso de matemática está no último período. Estudamos alguns resultados básicos sobre séries para depois compreendermos a ideia do método das séries. Utilizamos o método para obter soluções de EDOs em aplicações, e obter informações a partir da análise dessas soluções. Sempre que possível comparando os resultados com a solução exata obtida por outro método ou mesmo pelo software Maxima.

2. MATERIAL E MÉTODOS

Muitas das leis da natureza são passíveis de serem expressadas de forma natural na linguagem matemática. Se desejarmos resolver problemas – em biologia, química ou em engenharia –, temos primeiro que modelar esse problema em forma de uma expressão matemática. Essa expressão e chamada de *modelo matemático.*

Não é difícil percebermos que diversos conceito físicos, como exemplo, velocidade e aceleração, são derivadas(taxas de variação instantânea), assim, frequentemente os modelos matemáticos consistem de equações contendo derivadas de funções desconhecidas. Um modelo desse tipo é chamado de equação diferencial.

Uma equação diferencial é uma equação em que suas variáveis são funções e a equação envolve derivadas destas funções. Segundo KREYSZIG 2009:

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de ondem *n* envolve uma ou mas derivadas de uma função desconhecida, que chamamos dey(x), juntamente com suas derivadas.

$$\frac{(dy)}{(dx)},\frac{(d^2y)}{(dx^2)},\dots,\frac{(d^ny)}{(dx^n)}$$

O conceito de ordem fornece uma classificação útil para as EDOs, uma EDO é de ordem n quando a n-ésima derivada da função desconhecida yé a derivada mais alta de $y$na equação.

As equações diferenciais ordinárias podem ser divididas em duas grandes classes, EDOs lineares e não-lineraes.

As EDOs de primeira ordem contêm somente a primeira derivada y', podendo também conter ye x, dessa forma e possível escrever essas equações como

$$F(x, y, y') = 0(1)$$

ou, na forma

$$y' = f(x, y).(2)$$

Sendo (1) conhecida como forma *implícita* da EDO e (2) forma *explícita* da EDO, KREYSZIG 2009.

Uma EDO linear de primeira ordem é uma dos principais modelos de vários fenômenos na física, biologia, dinâmica populacional, ecologia, entre outros. Diz-se que uma EDO é linear de primeira ordem quando ela pode ser escrita na forma

$$y' + p(x)y = r(x).(3)$$

Caso contrário ela será uma EDO não-linear de primeira ordem.

Ainda segundo KREYSZIG 2009, uma função $y = h(x)$é chamada de solução de uma EDO (1) em algum intervalo aberto $a < x < b$se $h(x)$for definida e diferenciável ao longo de todo esse intervalo e se for tal que a equação se torna uma identidade quando ye y'são substituídos por he h', respectivamente. A curva (ou seja, o gráfico) de hé chamada de curva de solução.

Vejamos alguns exemplos. Primeiramente, verifiquemos que $y = h(x) = 100 + ce^{(-t)}$(onde$c$é uma constante) é um solução de$y' = 100 - y$. Para verificarmos isso, derivamos $h'(x) = -ce^{(-t)}$, substituindo y'por h'e $y$por$h$, obtemos:

$y' = 100 - y \rightarrow -ce^{(-t)} = 100 - 100 - ce^{(-t)}$logo, $-ce^{(-t)} = -ce^{(-t)}$.

Nos exemplos anteriores, pode-se ver que cada EDO possui uma solução contendo uma constante arbitrária, c. Uma solução que inclui uma constante arbitrária é chamada de solução geral da EDO.

Geometricamente, a solução geral de uma EDO é uma família de um número infinitamente grande de curvas, cada uma delas correspondendo a uma determinado valor da constante arbitrária. Se escolhermos um$c$ especifico obtemos o que se chama de solução particular de uma EDO.

A solução única ou solução particular de um determinado problema é obtida a partir de uma solução geral por meio de uma condição inicial $y(x_0) = y_0$, com valores dados para x_0e y_0, que são utilizados para se determinar um valor para a constante arbitrária c. Geometricamente, essa condição significa que a curva de solução deve passar pelo ponto (x_0, y_0)no plano *xy*. Uma EDO apresentada com a sua condição inicial é chamada de um *problema de valor inicial*. Portanto, caso a EDO seja explícita, $y' = f(x, y)$, o problema de valor inicial assume a forma

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0.$$

Vejamos um exemplo. Primeiramente, resolvendo o problema de valor inicial

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3\mathrm{y},\ y(0) = 5{,}7 \text{obtemos a solução geral} y(x) = ce^{3\mathrm{x}}.$$

A partir da solução geral$y(x) = ce^{3\mathrm{x}}$, e da condição inicial $y(0) = 5{,}7$, obtemos $y(0) = ce^0 = c = 5{,}7$. Portanto, o problema de valor inicial possui a solução $y(x) = 5{,}7e^{3\mathrm{x}}$, que é uma solução particular.

Verifiquemos o resultado por derivação que a solução$y(x) = 5{,}7e^{3\mathrm{x}}$satisfaz $y' = \frac{dy}{dx} = 3\mathrm{y}$e que $y(0) = 5{,}7$.

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 5{,}7e^{3\mathrm{x}} = 3 \cdot 5{,}7e^{3\mathrm{x}} = 3\mathrm{y} \text{e } y(0) = 5{,}7e^{(3\cdot 0)} = 5{,}7$$

Observe que até agora nós só confirmamos que as soluções dadas satisfazem de fato a equação, não nos preocupamos em obter a solução. Um dos métodos de resolução de EDOs com coeficientes variáveis mais utilizados é a resolução por séries de potência. Segundo SIMMONS & KRANTZ 2008, uma série de potência é uma série infinita da forma

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x - x_0)^m = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots(4)$$

onde xé uma variável e a_0, a_1,$a_2\ldots$ são chamadas de coeficientes da série. x_0é uma constante chamada de centro da série, e se $x_0 = 0$, obtemos um série de potência expressa em potência de x,

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots(5)$$

Dizemos que a série em (5) converge no ponto $x$se o limite

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{k} a_m x^m \text{(limite das somas parciais)}$$

existir. O valor desse limite é chamado de soma da série. Se o limite não existir no ponto$x$ a série e chamada de divergente.

Suporemos que a variável x, o centro x_0e os coeficientes a_0, a_1,a_2… sejam números reais.

Exemplos conhecidos de séries de potência convergentes são as séries de Maclaurim

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad |x| < 1, \text{ série geométrica;}$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots;$$

$$\cos(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2m!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots; \text{ e}$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{(2m+1)}}{2m+1!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

A série (4) sempre converge em $x = x_0$, logo que, todos os seus termos são nulos, excetuando-se talvez o primeiro termoa_0. Se existem outros valores pra $x$para os quais a série converge, esses valores formam um intervalo chamado intervalo de convergência. Se esse intervalo for finito, ele possui um ponto central x_0, de modo a ter a forma $|x - x_0| < R$e a série (4) converge para todo $x$tal que $|x - x_0| < R$e diverge para todo $x$tal que $|x - x_0| > R$. O número R é chamado de raio de convergência de (4). Pode-se obter R por meio de qualquer uma das seguintes formulas

$$R = \frac{1}{\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|}} (6), \qquad R = \frac{1}{\lim_{m\to\infty} \left|\frac{a_{(m+1)}}{a_m}\right|} (7)$$

BOYCE e DIPRIMA 2010.

O intervalo de convergência pode as vezes ser infinito, ou seja, (4) converge pra todo x. Por exemplo, quando o limite de (6) e (7) for zero.

Conforme falamos, o método de resolução de EDOs por séries é um dos mais utilizados, e agora veremos as etapas básicas do método de resolução, em equações lineares de primeira ordem.

Para uma dada EDO

$$y' + p(x)y = r(x).(3)$$

Primeiro representamos$p(x)$e $r(x)$por meio de séries de potência de x, mas frequentemente$p(x)$e $r(x)$são polinômios, com o qual nada precisa-se fazer nesta etapa. A seguir supomos que exista uma solução na forma de uma série de potencia com coeficientes conhecidos,

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots (8)$$

assim, temos a seguinte derivação

$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 \ldots (9)$$

e inserimos (8) e (9) termo a termo.

Consideremos a seguinte equação elementar

$$y' = y$$

cuja solução, pode-se ser obtida através de outras formas e métodos,$y = c \cdot e^x$. Agora verifiquemos, a resolução por séries

$$\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Agora as potencias de $x$devem coincidir, isto é, os coeficientes devem ser iguais. Concluímos que

$$a_1 = a_0,\ 2a_2 = a_1,\ 3a_3 = a_2,\ 4a_4 = a_3,\ \ldots$$

Vamos supor que$a_0$seja uma constante desconhecida$c$. Então, vemos que $a_1 = c$,$a_2 = \frac{c}{2}$,$a_3 = \frac{c}{3\cdot 2}$, $a_4 = \frac{c}{4\cdot 3\cdot 2}$, … .Em geral, $a_m = \frac{c}{m!}$.

Resumindo, nossa solução em séries de potencia da equação é

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c}{m!} x^m = c \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = c \cdot e^x.$$

Resta saber, é se toda EDO podem ter solução na forma de séries de potência.

Temos o seguinte teorema que garante a existência de soluções por séries para uma conjunto de equações:

Seja $x_0$um ponto ordinário da equação diferencial

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \quad (10)$$

, ou seja, p e q têm expansões em séries de potências convergentes em torno de x_0; e sejam α e β constantes reais arbitrárias. Então, existe uma única função real analítica $y = y(x)$que tem uma expansão em série em torno de x_0e tal que

a) A função y é solução da equação diferencial (10).

b) A função $y$satisfaz as condições iniciais $y(x_0) = \alpha$, $y'(x_0) = \beta$.

Se as funções pe $q$tiveram expansões em séries de potência em torno $x_0$com raio de convergência maior ou igual R, o mesmo vale para y. (ZILL e CULLEN 2009)

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Aplicaremos o método para encontrar a solução de uma equação diferencial obtida através da modelagem do aquecimento de um prédio utilizando a Lei de Resfriamento de Newton.

Suponha que, no inverno, a temperatura de um certo prédio de escritórios seja mantida a 70°F e que o aquecimento seja desligado às 22 horas da noite e religado às 6 horas da manhã. Num certo dia, às 2 horas da madrugada, a temperatura no interior do prédio era de 65°F. A temperatura exterior era de 50°F às 22 horas da noite e caiu para 40°F às 6 horas da manhã do dia seguinte. Qual era a temperatura dentro do prédio quando o aquecimento foi ligado às 6 horas da manhã?

Informação Física – Experimentos mostram que a taxa temporal de variação da temperatura Tde um corpo B(que seja bom condutor de calor, como, por exemplo, um esfera de cobre) é proporcional à diferença entre Te a temperatura do meio que o cerca (Lei de Resfriamento de Newton).

Elaboração de um modelo. Chamemos de $T(t)$a temperatura dentro do prédio e de T_{ext}a temperatura exterior (supondo que ela seja constante, para que possamos aplicar a lei de Newton – esta simplificação é muito comum na resolução de problemas reais para se testar a compatibilidade de um modelo à situação real). Dessa forma,segundo essa mesma lei,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_{\text{ext}}). \quad (11)$$

Para obtermos a solução geral usando o método das séries fazemos:

$$T(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots \text{e} \frac{dT}{dt}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3\mathrm{a}_3 t^2 + \dots$$

assim,

$$a_1 + 2\mathrm{a}_2 t + 3\mathrm{a}_3 t^2 + \dots = k(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots - T_{\text{ext}})$$
$$a_1 + 2\mathrm{a}_2 t + 3\mathrm{a}_3 t^2 + \dots = (ka_0 - kT_{\text{ext}}) + ka_1 t + ka_2 t^2 + ka_3 t^3 + \dots$$

para que essa igualdade se verifique, é preciso que os dois coeficientes das mesmas potências de *x* em cada lado sejam iguais. Obtemos então,

$$a_1 = k(a_0 - T_{\text{ext}}), a_2 = \frac{k^2}{2}(a_0 - T_{\text{ext}}), a_3 = \frac{k^3}{3 \cdot 2}(a_0 - T_{\text{ext}}), \cdots$$

Como a temperatura externa variou de 50ºF para 40ºF, e o nosso modelo por simplificação considerou que a temperatura externa é constante, vamos considerar

$$T_{\text{ext}} = \frac{50 + 40}{2} = 45^{\circ}\text{F}$$

Assim nossa solução geral da da em série é

$$T(t) = a_0 + (a_0 - 45)kt + (a_0 - 45)\frac{k^2 t^2}{2!} + (a_0 - 45)\frac{k^3 t^3}{3!} + \dots$$

Uma solução particular é obtida fazendo $T(0) = 70$, ou seja, escolhemos 22h corresponder a *t*=0 . E portanto $a_0 = 70$e $T(t) = 70 + 25kt + 25\frac{k^2 t^2}{2!} + 25\frac{k^3 t^3}{3!} + \dots$

Para estimarmos o valor de *k* consideramos a soma parcial dos quatro primeiros termos e resolvemos a equação do terceiro grau em *k* utilizando o Maxima (Figura 1), fazendo $T(4) = 65$, o que é suficiente para nós. Obtemos então *k*=0,0557 aproximadamente. Com isso temos a solução particular do nosso problema:

$T(t) = 70 - 1{,}393t + 0{,}039t^2 - 0{,}001t^3 + \ldots$ Para os nossos propósitos consideraremos apenas a soma parcial dos quatro primeiros termos, ou seja, o polinômio de terceiro grau.

Para sabermos qual era a temperatura dentro do prédio quando o aquecimento foi ligado às 6 horas da manhã, basta calcularmos então $T(8)$, ou seja,

$$T(8) = 70 - 1{,}393 \cdot 8 + 0{,}039 \cdot 8^2 - 0{,}001 \cdot 8^3 \approx 60{,}840$$

Assim às 6h da manhã a temperatura no interior do prédio era de 60,840ºF, ou seja, caiu aproximadamente 9.16ºF.

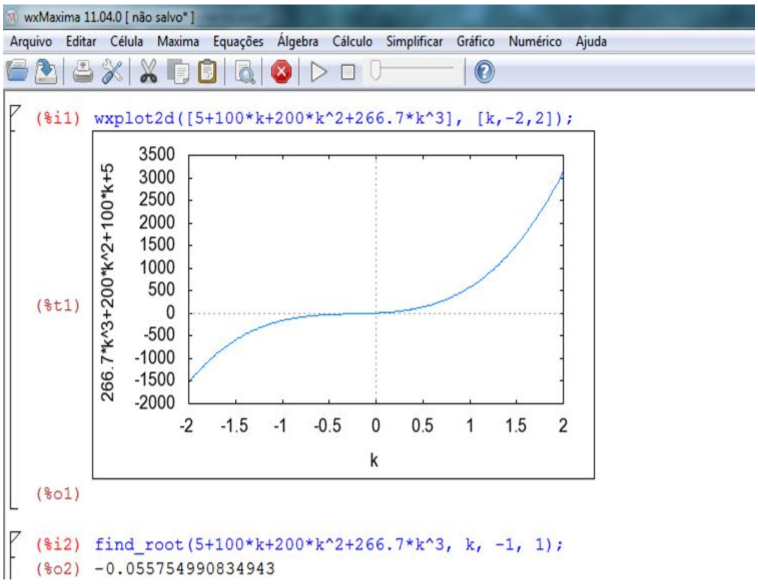

Figura 1: gráfico do polinômio em k e obtenção da raiz.(Maxima)

Podemos obter a solução da equação diferencial (11) por outro método, por exemplo separação de vaiáveis. Obtendo assim a solução para o nosso caso: $T(t) = 45 + ce^{kt}$com solução particular. $T_p(t) = 45 + 25e^{kt}$. Para determinando k utilizamos $T(4) = 65$, $k = \frac{1}{4}\ln(0{,}8) = -0{,}056$, ou seja,$T_p(t) = 45 + 25e^{-0{,}056t}$. A solução do problema é $T_p(8) = 45 + 25e^{-0{,}056 \cdot 8} = 60{,}973°F$. O que dá uma diferença 0,133 da solução obtida por uma aproximação por séries de potências. Graficamente podemos visualizar esta diferença no gráfico da figura 2.

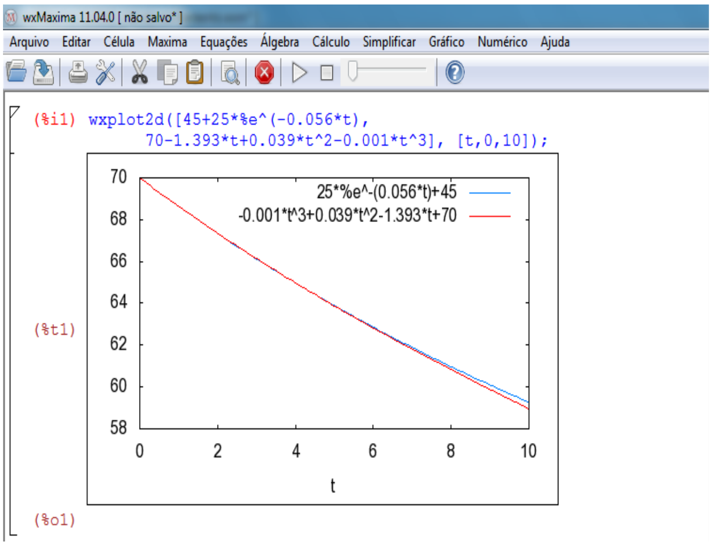

Figura 2: Comparação entra as soluções obtidas pelo método das séries e por separação de variáveis.

4. CONCLUSÕES

A pesquisa, a pesar de extensa, foi muito instrutiva pois compreendia uma introdução ao estudo das equações diferenciais ordinárias, e a um importante método de solução.

Pudemos verificar com o estudo, como mostra a figura 2, que uma solução obtida pelo método das séries é tão bom quanto o obtido exatamente. Sendo que em muitas vezes não é possível obter a solução exata em termos de funções elementares, mas podemos obter série convergente.

Uma das dificuldades encontradas foi encontrar aplicações reais que pudessem ser utilizadas para se obter uma solução por meio de séries, pois os casos encontrados na literatura não se encaixavam nas hipóteses do teorema de existência de soluções por série.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

KREYSZIG, E. **Matemática Superior para Engenharia v. 1**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

SIMMONS, G. F.; KRANTZ, S. G. **Equações Diferenciais: Teoria, Técnica e Prática**. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Matemática Avançada para Engenharia v. 1**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.