



Simulações de Pêndulo Simples e Invertido¹

André Pereira da Costa², Valnyr Vasconcelos Lira³, Samuel Alves da Silva⁴

¹Parte do trabalho de conclusão de curso do primeiro autor.

²Graduando em Tecnologia em Automação Industrial – IFPB. Bolsista Voluntário do PIBICT. e-mail: andre.pcosta@yahoo.com.br

³Professor Mestre do Curso Superior de Tecnologia em Automação Industrial – IFPB. Pesquisador do PIBICT. e-mail: valnyr@ifpb.edu.br

⁴Professor Mestre do Curso Superior de Tecnologia em Automação Industrial – IFPB. Pesquisador do PIBICT. e-mail: samuel@ifpb.edu.br

Resumo: Esta pesquisa consiste em simulações, no Matlab, de sistemas de pêndulos simples e invertido, objetivando auxiliar como uma ferramenta didática à disciplina de Controle de Processos. Com os conhecimentos construídos, este trabalho estimula sua aplicação prática, contribuindo significativamente para a formação profissional do estudante da área de tecnologia. A metodologia compreendeu o estudo bibliográfico dos sistemas de pêndulos, a modelagem matemática e a simulação em malha aberta no Matlab.

Palavras-chave: controle de processos, ferramenta didática, matlab.

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, a automação de sistemas de controles está se tornando cada vez mais associada com o expressivo setor da informática. Vários tipos de controle são construídos, de maneira acelerada, por sofisticados métodos e recursos da computação. Abundantemente, podemos encontrar no campo industrial, alguns desses sistemas de controles automáticos: inovação espacial e bélica, robótica, transportes, setor de montagem automatizada, produção de equipamentos, controle de qualidade, entre outros.

Desta forma, o controle torna-se indispensável na vida moderna, de forma contínua e diversificada de atuação, com abrangência completa e ampla, em que o uso de sistemas automáticos de controle tem se difundido em larga escala, podendo mesmo ser considerados como alicerces para o desenvolvimento tecnológico. E entre os muitos desses sistemas existentes, podemos citar o pêndulo simples e o invertido.

A principal relevância do pêndulo simples é a conveniência de possibilitar a determinação da gravidade e também na verificação do movimento rotacional terrestre. E no caso específico do pêndulo invertido, do ponto de vista tecnológico, este sistema é de extrema relevância aos estudos e pesquisas nesta área, pois possibilita o esclarecimento dos problemas práticos integrados, que são empregados no controle de sistemas na atualidade.

Neste trabalho, são abordadas técnicas para modelar um pêndulo simples e um pêndulo invertido por meio de um simulador desenvolvido no software Matlab (MATHWORKS, 2002), com tal pode servir como ferramenta no processo de ensino e aprendizagem para o ensino de controle de processos, e, também como espelho para inúmeros projetos com problemas relacionados à instabilidade, exemplificando, estes paradigmas são semelhantes aos utilizados em foguetes, no que se refere a sua estabilidade de voo, na posição de guindastes específicos, entre outros (RIBEIRO, 2007).

Entre os pesquisadores, que obtiveram bons resultados no desenvolvimento de kits didáticos ao Ensino de Teoria de Controle, pode-se mencionar Lima *et al.*(2007), que desenvolveu uma plataforma experimental, Martins *et al.*(2008), que realizou simulações de um controlador em uma plataforma experimental, Ferreira *et al.*(2006), que elaborou um protótipo do pendulo invertido, entre outros.

Assim, a simulação desempenha um importante papel para a aprendizagem dos alunos, antes destes entrarem no mundo do trabalho e, também, durante este, contribuindo para a solução de inúmeros problemas de controle que surgem nos processos industriais.

Aqui, os objetivos foram realizar um estudo para implementação de um sistema de controle de pêndulo simples e de pêndulo invertido por intermédio de simulações no software Matlab, realizar a modelagem dos pêndulos (simples e invertido), linearizar os modelos desenvolvidos, aplicar técnicas

de controle clássico nos modelos linearizados e realizar comparação entre os modelos não lineares e os linearizados.

2. MATERIAL E MÉTODOS

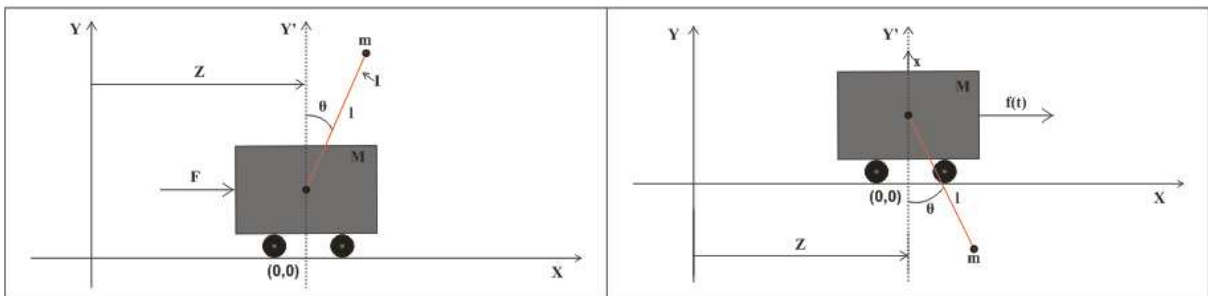
No estudo para implementação de um sistema de pêndulo simples e de pêndulo invertido por intermédio de simulações no software Matlab, foram realizados o estudo bibliográfico sobre o tema trabalhado na pesquisa, a modelagem matemática dos sistemas pesquisados e a simulação de modelos em malha aberta. Posteriormente, iremos realizar simulações em malha fechada, finalizando com implementação da interface gráfica (em malha aberta e em malha fechada).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DO PÊNDULO SIMPLES E DO PÊNDULO INVERTIDO

O desenvolvimento da modelagem matemática do pêndulo invertido foi apresentando em da Costa, 2011. Para o modelamento matemático do pêndulo simples, uma análise similar foi realizada, sendo apresentado ambos os resultados na sequência.

A Figura 01b apresenta um carrinho, que possui massa M , fluindo (deslizando) sobre um plano horizontal, desconsiderando a força do atrito. Neste caso, iremos considerar que sobre ele é aplicado uma força $f(t)$. O eixo de rotação de um pêndulo simples, que possui comprimento l e massa pontual m , é representado pelo centro de massa do carrinho. Aqui, apresentamos o modelo voltado às baixas oscilações, isto é para pequenos valores do ângulo θ .



(a) Pêndulo Invertido.

(b) Pêndulo Simples.

Figura 1 - Sistemas Mecânicos dos Pêndulos Invertido e Simples com o carrinho

Este sistema mecânico possui duas massas, o que nos dá dois dados relevantes: θ para delinear o movimento rotacional do pêndulo, que possui massa m ; x para delinear o movimento translacional do carrinho, que possui massa M . Na Figura 02, podemos observar o peso mg que causa momento em analogia ao ponto O e as forças que determinam o movimento de translação na direção x , ambos no diagrama de corpo livre.

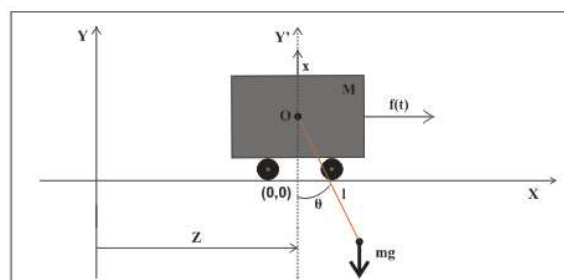


Figura 2 – Diagrama de corpo livre do pêndulo simples.

A função de transferência do sistema do pêndulo simples é dada por:

$$\frac{\theta}{U} = \frac{\frac{ml}{q}s}{s^3 + \frac{(I + ml^2)}{q}bs^2 + \frac{(M + m)mg}{q}ls + \frac{mgbl}{q}} \quad [\text{Eq. 01}]$$

Onde:

$$q = (I + ml^2)(M + m) + (ml)^2 \quad [\text{Eq. 02}]$$

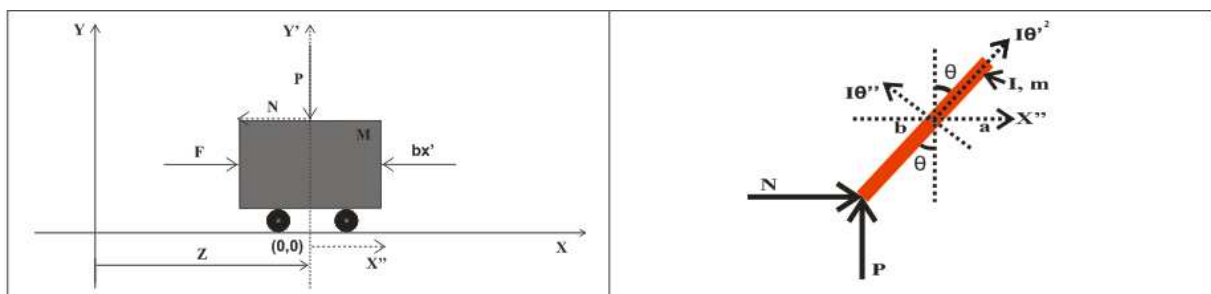
Além disto, a forma de espaço de estados do pêndulo simples, considerando como vetor de estados $X = [x \quad \dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta}]$, é:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(I + ml^2)b}{q} & -\frac{(ml)^2 g}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb}{q} & -\frac{(M + m)mg}{q} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(I + ml^2)}{q} \\ 0 \\ -\frac{ml}{q} \end{bmatrix} F \quad [\text{Eq. 03}]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} F \quad [\text{Eq. 04}]$$

Já o modelo do pêndulo invertido está representado na Figura 01a. Assim, na direção vertical, ocorrerá o equilíbrio do pêndulo, isto é, o ângulo θ será nulo ($\theta=0^\circ$). Então, o pêndulo executa um movimento angular, por meio da força F , ocorrendo o equilíbrio, na vertical, da sua barra.

Na Figura 03, temos a representação dos diagramas de corpo livre do sistema do pêndulo invertido apresentado na Figura 01a.



(a) Carrinho.

(b) Barra ou Haste.

Figura 3 – Diagramas de corpo livre do sistema do pêndulo invertido.

A função de transferência do sistema do pêndulo invertido é dada por:

$$\frac{\theta}{U} = \frac{\frac{ml}{q}s}{s^3 + \frac{(I + ml^2)b}{q}s^2 - \frac{(M + m)mg}{q}s - \frac{bgml}{q}} \quad [\text{Eq. 05}]$$

onde q é dada pela Eq. 02:

Além disso, a forma de espaço de estados do pêndulo invertido, considerando como vetor de estados $X = [x \quad \dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta}]$, é:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(I + ml^2)b}{q} & \frac{(ml)^2 g}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{q} & \frac{mgl(M + m)}{q} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(I + ml^2)}{q} \\ 0 \\ \frac{ml}{q} \end{bmatrix} F \quad [\text{Eq. 07}]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} F \quad [\text{Eq. 08}]$$

onde q é dada pela Eq. 02.

Note que as equações que descrevem os modelos dos pêndulos simples e invertidos são similares, diferenciando apenas com relação aos sinais dos seus termos.

3.2 SIMULAÇÕES EM MALHA ABERTA

Na Tabela 1 são descritos os parâmetros do sistema (valores e unidades dos próprios) que foram empregados nas simulações.

Tabela 1 – Descrição dos parâmetros empregados nos sistemas mecânicos estudados na pesquisa

Símbolos	Descrição	Valores	Unidades
M	Massa do carro	1,0	Kg
m	Massa do pêndulo	0,6	Kg
l	Comprimento do pêndulo (centro de massa)	0,5	m
F	Força aplicada no carro	-	N
I	Inércia aplicada no pêndulo	0,010	Kg.m ²
a	Coefficiente de atrito do carro	0,25	Nm/s
x	Posição da coordenada do carro	-	m
θ	Ângulo do pêndulo	-	grau
g	Aceleração da gravidade	9,81	m/s ²

Inicialmente, foi realizada a simulação da função de transferência do pêndulo simples, em malha aberta, como apresentado na Figura 4. Neste caso considerou-se a resposta ao impulso. Como esperado, nota-se que como o sistema é estável, a haste do pêndulo tende a posição de 0°, ou seja, o sistema responde com uma oscilação amortecida. O mesmo comportamento é obtido para a simulação no espaço de estados, como pode ser visto na Figura 5.

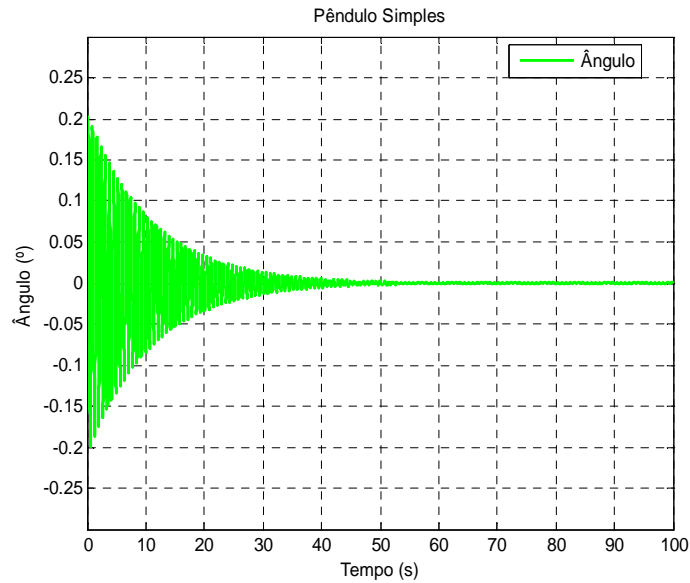


Figura 4 – Simulação da função de transferência do pêndulo simples.

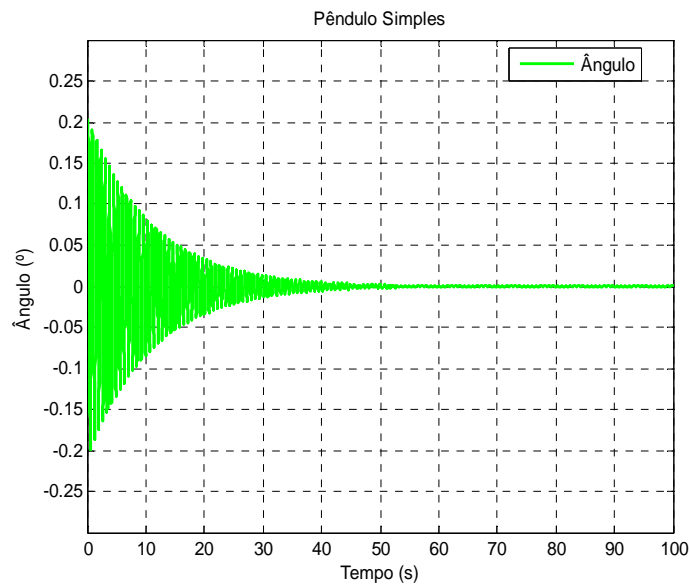


Figura 5 – Simulação no espaço de estados do pêndulo simples.

Analisando as Figuras 4 e 5, nota-se que em torno de 50 segundos as oscilações são praticamente encerradas.

As simulações para a resposta ao impulso do pêndulo invertido, na função de transferência e no espaço de estados, são apresentadas respectivamente nas Figuras 6 e 7. Como esta configuração é instável, nota-se nestas figuras que há uma explosão no valor do ângulo da haste, indicando a instabilidade do sistema.

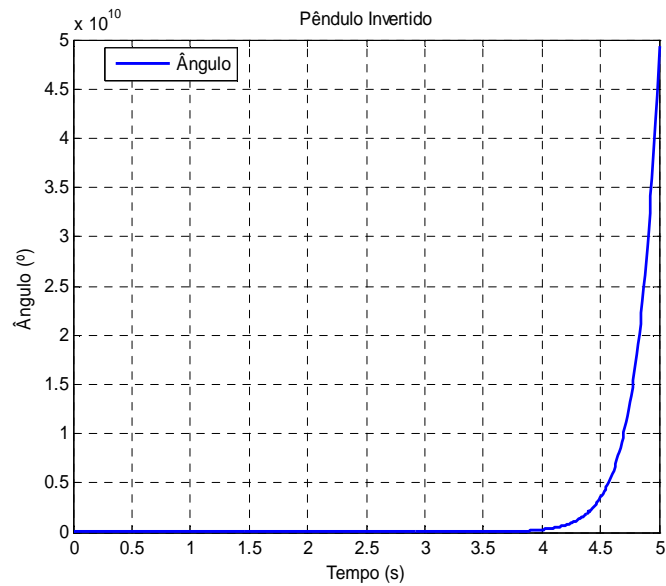


Figura 6 – Simulação da função de transferência do pêndulo invertido.

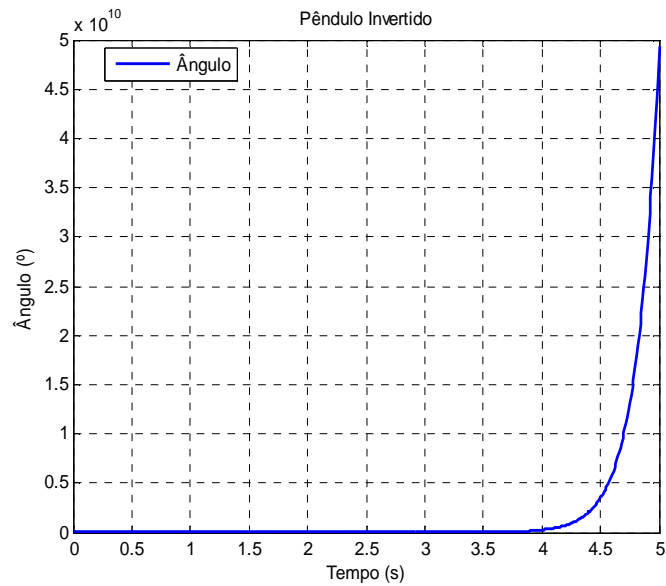


Figura 7 – Simulação no espaço de estados do pêndulo invertido.

Para facilitar o aluno usuário a entender e manipular o sistema, uma interface gráfica vem sendo desenvolvida, como apresentado na Figura 8, onde o tipo de sistema (simples ou invertido), pode ser escolhido e os parâmetros do mesmo podem ser configurados. Além disso, será possível também escolher se o sistema irá ser simulado em malha aberta (funcionalidade já implementada) ou em malha fechada (funcionalidade em desenvolvimento).

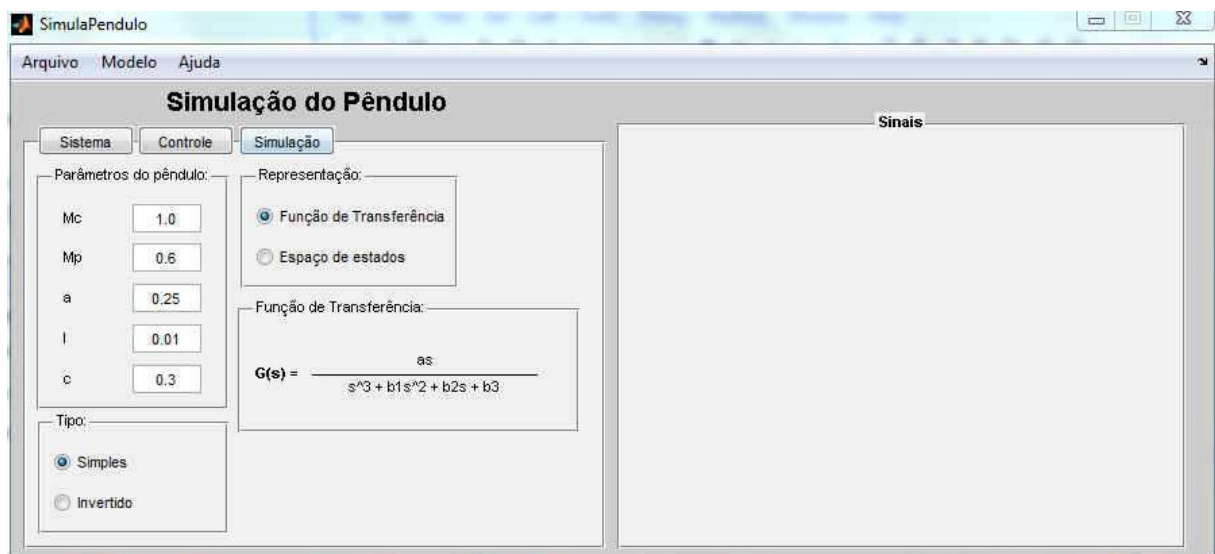


Figura 8 – Tela do supervisor de simulação do sistema de pêndulo simples e invertido.

6. CONCLUSÕES

Nesta pesquisa, fica evidente que a simulação desempenha um papel fundamental na área da Tecnologia, em especial na Automação Industrial, onde ela pode auxiliar na antecipação de solução de inúmeras dificuldades que surgirão em experimentos práticos.

Com o intenso crescimento da área de Controle de Processos, diversos softwares, aplicativos e simuladores são organizados por pesquisadores (engenheiros, tecnólogos, e demais estudantes da área), de maneira a possibilitar o desenvolvimento prático, possibilitando que novos métodos de controle sejam avaliados e empregados nos mais distintos ambientes e situações.

Além disto, o ensino de Controle de Processos necessita ser trabalhado de maneira a proporcionar um embasamento sólido para uma aprendizagem efetiva e continuada, capaz de suportar com as mais diversas e complexas situações da área de controle, mantendo sempre altos padrões de excelência, somando-se a isto, com uma aprendizagem significativa dos conceitos e fundamentos teóricos de Controle de Processos. Mas, para isto é impossível, se não houver, nos estudantes, uma maturidade matemática e, principalmente, de conhecimentos de Física para a realização da Modelagem de sistemas complexos.

Assim, o Ensino de Controle a partir desta abordagem oferece aos cursos de Tecnologia em Automação Industrial um importante mecanismo que incentiva o estudante na procura de alternativas para resolver as situações, por eles vivenciadas, tanto no ambiente acadêmico como no profissional.

Em trabalhos futuros, iremos finalizar a simulação em malha aberta e iniciar a simulação em malha fechada, e, posteriormente, finalizar implementação da interface gráfica para os dois sistemas.

REFERÊNCIAS

FERREIRA, A. L. S. et al. **O Problema da Defasagem entre a Teoria e a Prática: Proposta de uma Solução de Compromisso para um Problema Clássico de Controle**. In: XXXIV Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 2006. Disponível em: <<http://www.ufjf.br/peteletrica/files/2010/03/5.pdf>> Acesso em: 10 jul. 2011

IMI/USP (Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo). **Modelagem Matemática de Sistemas Hídricos pela Mecânica Newtoniana**. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~oda/contents/01Matem%E1tica/01Sistemas%20Din%E2mic07_Mod_Mat_Sist_Mec_Hibr_Newton.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2012



da Costa, A. P., da Silva, S. A. e Lira, V. V. **Desenvolvimento de um Simulador para um Sistema de Pêndulo Invertido**. In: VI Congresso de Pesquisa e Inovação da Rede Norte Nordeste de Educação Tecnológica, 2011. CD-ROM.

LIMA, F. A. de; et al. **Desenvolvimento de uma Plataforma Experimental para o Ensino de Controle de Processos**. In: II Congresso de Pesquisa e Inovação da Rede Norte Nordeste de Educação Tecnológica, 2007. CD-ROM.

MARTINS, S. B.; et al. **Projeto de Simulação de um Controlador de uma Plataforma Experimental**. In: III Congresso de Pesquisa e Inovação da Rede Norte Nordeste de Educação Tecnológica, 2008. CD-ROM.

MATHWORKS. **Getting Started With Matlab**. Version 6.5. MathWorks, 2002.

RIBEIRO, R. **Implementação de um Sistema de Controle de um Pêndulo Invertido**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Programa em Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Itajubá: UNIFEI, 2007. Disponível em:<<http://adm-net-a.unifei.edu.br/phl/pdf/0030714.pdf>> Acesso em: 20 jan. 2012.