Obtenção de Limitantes da União Expurgados de Esquemas de Modulação Codificada em Treliça

Jessyca Gomes da Silva[1], Luiz Guedes Caldeira[2]

[1]Graduanda em Engenharia Elétrica – IFPB. e-mail: jessycagomes@ieee.org
[2]Doutor em Engenharia Elétrica. Professor do IFPB. e-mail: fulaninhosdetal@ifto.edu.br

Resumo: Este trabalho apresenta uma técnica para a obtenção de limitantes expurgados da probabilidade de erro de esquemas de modulação codificada em treliça (TCM- *Trellis Coded Modulation*) baseada em um algoritmo para o cálculo do espectro de distâncias baseado na manipulação algébrica dos elementos da matriz adjacência do diagrama de super estados (DSE) do codificador. O algoritmo calcula a função de transferência completa do primeiro evento erro. Para reduzir a complexidade do DSE é apresentado um algoritmo para a redução do número de estados através do colapso de estados equivalentes. Os algoritmos apresentados têm a vantagem de serem facilmente implementados usando linguagens de programação simbólica. Resultados de simulação comprovam que os limitantes expurgados obtidos com estes espectros de distâncias são convergentes.

Palavras–chave: espectro de distâncias, função de transferência, probabilidade do evento erro, modulação codificada

1. INTRODUÇÃO

Considere um sistema de comunicação digital que emprega um esquema de modulação codificada em treliça (TCM). Em cada intervalo de sinalização, o transmissor codifica k *bits* de informação por símbolo complexo correspondendo a um ramo na treliça do codificador com v elementos de memória e 2^v estados.

O cálculo de desempenho de esquemas TCM em canais com ruído aditivo Gaussiano branco baseia-se na enumeração de distâncias Euclidianas e de Hamming entre sequências de símbolos na saída e na entrada do codificador, respectivamente. Esta enumeração constitui o espectro de distâncias do código. Considere que o decodificador escolhe um percurso na treliça que começa a divergir do percurso transmitido em um intervalo de sinalização fixo, e após L intervalos estes percursos voltam a coincidir pela primeira vez, dizemos então que ocorreu um primeiro evento erro (ou evento erro simplesmente) de comprimento L. Para as sequências de pontos da constelação transmitida $c = \{c_1, \dots, c_L\}$ e decodificada $e = \{e_1, \dots, e_L\}$, representado um evento erro de comprimento L, define-se o quadrado da distância Euclidiana entre c e e como $d^2 = \sum_{i=1}^{L} |c_i - e_i|^2$. A probabilidade de ocorrer um evento erro, P_e, é limitada superiormente por (SCHELEGEL, 1997):

$$P_e \leq \sum_{i=1}^{\infty} A_i Q\left(\sqrt{\frac{d_i^2 R E_b}{2N_0}}\right), \quad (1)$$

sendo E_b N_0 a relação sinal ruído média por *bit*, A_i o número médio de eventos erro de qualquer comprimento com distância Euclidiana d_i^2 e $Q(\cdot)$ a integral da cauda da função de densidade de probabilidade Gaussiana. Um limitante para a probabilidade de erro de *bit*, P_b, é obtido considerando que eventos erro com distância d_i^2 têm em média B_i *bits* de informação errados e como o código processa k *bits* de informação por intervalo de sinalização, tem-se (SCHELEGEL, 1997):

$$P_b \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_c} B_i Q\left(\sqrt{\frac{d_i^2 R E_b}{2N_0}}\right), \quad (2)$$

A enumeração dos conjuntos de n pares $S_A = \{(A_i, d_i^2)\}_{i=1}^{n}$ e $S_B = \{(B_i, d_i^2)\}_{i=1}^{n}$, considerando as menores distâncias d_i^2 ,constitui o espectro de distâncias de n-ésima ordem do código TCM, sendo a menor delas, d_1^2 , denominada de distância livre.

ISBN 978-85-62830-10-5
VII CONNEPI©2012

Fórmulas fechadas para limitantes superiores das probabilidades P_e e P_b também podem ser obtidas a partir da função de transferência do código $T(x, y)$, definida por (SCHELEGEL, 1997):

$$T(x,y) = \sum_{d_H} \sum_{d} C_{d_H,d} x^{d_H} y^{d^2}, \quad (3)$$

sendo $C_{d_H,d}$ o número médio de eventos erro com distância Euclidiana d e distância de Hamming d_H entre as sequências de informação transmitida e decodificada.

Como os códigos TCM em geral não são geometricamente uniformes (UNGERBOECK,1982), a enumeração da função de transferência e do espectro de distâncias é realizada através de uma busca em um diagrama de super estados (DSE) do codificador (BIGLIERI, 1984). Os estados do DSE, $\sigma_i, i = 1, \ldots, 2^{2v}$, são formados por pares de estados da treliça do codificador, p, q , $p, q = 1, \ldots, 2^v$, onde p e q são os estados da sequência transmitida e da sequência decodificada, respectivamente, em um dado intervalo de sinalização. A transição entre estados do DSE, $\sigma_i \rightarrow \sigma_j$, corresponde a transição entre pares de estados $p, q \rightarrow (r, s)$, isto é, a sequência codificada transiciona de p para r e a sequência decodificada transiciona de q para s. Denotamos por $d_H(\sigma_i \rightarrow \sigma_j)$ e $d^2(\sigma_i \rightarrow \sigma_j)$ a distância de Hamming e o quadrado da distância Euclidiana correspondendo a esta transição. Existem 2^k transições equiprováveis que divergem de cada estado da treliça do codificador. O rótulo do ramo que conecta a transição de estados $\sigma_i \rightarrow \sigma_j$ do DSE é dado por:

$$\frac{1}{2^{k_c}} \sum_{c,e} x^{d_H(\sigma_i \rightarrow \sigma_j)} y^{d^2(\sigma_i \rightarrow \sigma_j)}, \quad (4)$$

O somatório em (4) indica que os símbolos transmitidos e decodificados devem ser escolhidos em todas as transições paralelas que conectam os estados σ_i e σ_j. O somatório não deve ser considerado se não existirem transições paralelas. O estado σ_i é chamado de estado *bom* (G) se $p = q$ ou de estado *ruim* (B) se $p \neq q$. O DSE tem 2^v estados *bons* e $2^{2v} - 2^v$ estados *ruins*.

O (i, j)-ésimo elemento da matriz adjacência, denotada por $\boldsymbol{A}$, do DSE é o rótulo do ramo correspondente a transição $\sigma_i \rightarrow \sigma_j$. Se não existir esta transição faz-se este elemento igual a zero. O (i, j)-ésimo elemento da L-ésimo potência da matriz adjacência $\boldsymbol{A}$ é um polinômio de 2 variáveis x e y cujos expoentes são as distâncias de Hamming e Euclidiana quadrada, respectivamente, de todos os caminhos no DSE de comprimento L originando em σ_i e terminando em σ_j e os seus coeficientes são as multiplicidades médias associadas a estas distâncias.

Como o número de estados do DSE é 2^{2v}, o processo de busca do espectro de distâncias torna-se computacionalmente ineficiente para valores de v moderados (por exemplo, $v > 4$), tornando necessária uma redução da matriz adjacência do DSE via colapso de estados equivalentes, como proposto por SCHELEGEL (1997) e BIGLIERI (1991).

Neste trabalho é propostos um algoritmo para o cálculo do espectro de distâncias de códigos TCM. O algoritmo calcula a função de transferência a partir da matriz adjacência $\boldsymbol{A}$, ou a partir da sua forma reduzida. O algoritmo apresentado é uma adaptação para códigos TCM do algoritmo iterativo proposto inicialmente para códigos convolucionais por PIMENTEL (2003). Em cada iteração do algoritmo encontra-se a matriz adjacência do DSE com 1 estado *ruim* a menos, mas que preserva toda informação para o cálculo da função de transferência do DSE inicial. Este processo é repetido até que resulte em uma matriz adjacência de um DSE com apenas estados *bons*.

2. MATERIAL E MÉTODOS

a) Algoritmo para redução da matriz adjacência do DSE

Um evento erro de comprimento maior que 1 corresponde a um caminho no DSE que começa em um estado *bom*, a primeira transição é para um estado *ruim* e este retorna pela primeira vez a um estado *bom* em algum instante futuro. Um evento erro de comprimento 1 corresponde a transições paralelas entre estados *bons*. Por conveniência, particiona-se a matriz adjacência $\boldsymbol{A}$ da seguinte forma:

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} \boldsymbol{A}_{GG} & \boldsymbol{A}_{GB} \\ \boldsymbol{A}_{BG} & \boldsymbol{A}_{BB} \end{matrix}, \quad (5)$$

onde $\boldsymbol{A}_{GG}$ representa transições entre estados *bons*, $\boldsymbol{A}_{GB}$ representa transições de estados *bons* para estados ruins e similarmente para as outras submatrizes. $\boldsymbol{A}_{GG}$, $\boldsymbol{A}_{GB}$, $\boldsymbol{A}_{BG}$, $\boldsymbol{A}_{BB}$ têm dimensão $2^v \times 2^v, 2^v \times 2^{2v} - 2^v,\ 2^{2v} - 2^v \times 2^v, 2^{2v} - 2^v \times 2^{2v} - 2^v$ respectivamente. A função de transferência pode ser obtida diretamente da matriz $\boldsymbol{A}$ (SCHLEGEL, 1997):

$$T\ x, y\ = \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{A}_{GG}\mathbf{1} + \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{A}_{GB}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{BB})^{-1}\boldsymbol{A}_{BG}\mathbf{1}\ , \quad (6)$$

onde $\boldsymbol{\Pi}$ é um vetor linha 1×2^v de probabilidades, cujos elementos são iguais a $1\ \ 2^v$ (probabilidade de um evento erro iniciar em algum estado *bom*) e $\mathbf{1}$ é um vetor coluna de 1's. O primeiro termo do lado direito da igualdade em (6) corresponde a contribuição de eventos erro de comprimento 1 (percursos paralelos) para a função de transferência, enquanto o segundo termo corresponde a todos os eventos erro de comprimento maiores que 1. Uma forma alternativa para calcular $T(x, y)$ consiste na resolução de um sistema de equações lineares (BIGLIERI ,1991).

A complexidade computacional do cálculo de $T(x, y)$ varia de acordo com o grau de simetria do código. Por exemplo, se o código é geometricamente uniforme pode-se fixar uma sequência particular (em geral a sequência toda zero) como a sequência transmitida. Neste caso, o número de estados do DSE pode ser reduzido para 2^v. Uma classe de códigos conhecidos como *quase regulares* (ROUANNE; COSTELLO,1989) não satisfazem esta propriedade de equipartição uniforme, mas a função de transferência pode ser calculada usando um DSE reduzido com 2^v estados (ROUANNE; COSTELLO,1989). Uma discussão sobre os vários graus de simetria de códigos TCM e os algoritmos usados para enumerá-los é detalhada por (BENEDETTO et al, 1994).Entretanto, em casos gerais em que estas simetrias não são observadas, pode-se reduzir a complexidade do DSE eliminando-se estados equivalentes (caso estes existam), obtendo-se uma nova matriz adjacência de dimensão reduzida, sem alterar a função de transferência do código. Esta redução da matriz adjacência será discutida a seguir.

Define-se o rótulo de um caminho no DSE como o produto dos rótulos correspondendo a cada transição de estados que formam o caminho. Dois estados do DSE são ditos equivalentes se o conjunto formado pelos rótulos de todos os caminhos de qualquer comprimento que começam nestes estados são idênticos. Um conjunto de estados equivalentes do DSE, digamos $\Gamma = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$, podem ser colapsados mantendo-se apenas 1 estado representativo da classe (considera-se que este é o de menor índice I_1). Estados com linhas idênticas na matriz adjacência são equivalentes e o colapso destes estados forma uma nova matriz adjacência efetuando-se as seguintes operações: o primeiro passo consiste em adicionar as colunas com índices em Γ (adição definida como componente a componente). O resultado desta operação é a coluna I_1 da matriz adjacência reduzida. Em seguida, deve-se zerar as linhas e colunas $I_2, \ldots, I_n$. Estes dois passos consistem em redirecionar para I_1 todos os ramos terminando em $I_2, \ldots, I_n$ e eliminar estes estados. Os outros elementos da matriz reduzida são idênticos aos da matriz original. Este procedimento é aplicado separadamente nos estados *bons* e *ruins*. Quando os estados *bons* forem colapsados, o vetor de probabilidades $\boldsymbol{\Pi} = [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{2^v}]$ deve ser atualizado de tal forma que $\pi_{I_1} = \pi_{I_2} + \ldots + \pi_{2^v}$ e para os estados colapsados $\pi_{I_1} = \cdots = \pi_{I_n} = 0$. Se após o colapso de conjuntos de estados equivalentes ainda restarem linhas (não nulas) idênticas, aplica-se novamente o procedimento descrito anteriormente até que todas as linhas (não nulas) da matriz sejam distintas. Após todas as reduções, as linhas não nulas da matriz resultante formam uma matriz adjacência reduzida $\boldsymbol{A}'$, de dimensão $L_a \times L_a$, com n'_g estados *bons* e n'_b estados *ruins*, onde $L_a = n'_g + n'_b$. O novo $1 \times n'_g$ vetor de probabilidades é denotado por $\boldsymbol{\Pi}'$.

Exemplo 1: Seja o código de Ungerboeck, $2^v = 4$, $R_c = 1$ *bit*/símbolo, QPSK. Este código possui uma matriz adjacência $\boldsymbol{A}$ de dimensão 16×16, que após a aplicação do algoritmo de redução de estados produz uma matriz com $n'_g = 1, n'_b = 2, L_a = 3$:

$$A' = \begin{matrix} 1 & xy^4 & 0 \\ 0 & xy^2 & y^2 \\ y^4 & x & 0 \end{matrix}, \quad (7)$$

O vetor de probabilidades é $\boldsymbol{\Pi}' = [1]$.

É importante destacar que o algoritmo apresentado, apesar de poder apresentar uma redução de estados do DSE, não é ótimo quanto ao número de estados reduzidos (SHI ; WESEL ,2004). Porém, este conta com a vantagem da facilidade de implementação por qualquer software de programação simbólica. A próxima secção descreverá o algoritmo para calcular a função de transferência completa de códigos TCM.

b) Algoritmo para cálculo da função de transferência de códigos TCM

O algoritmo apresentado nesta seção para o cálculo da função de transferência de códigos TCM é uma extensão do algoritmo proposto por PIMENTEL (2003) para calcular a função de transferência de códigos convolucionais e emprega um algoritmo de redução de estados (SRA - *State Reduction Algorithm*) a partir da matriz reduzida $\boldsymbol{A}'$. O objetivo do algoritmo iterativo SRA é calcular a contribuição para a função de transferência de eventos erro de comprimento maiores que 1, reduzindo a cada passo 1 estado ruim do DSE e calculando uma nova matriz adjacência que produz a função de transferência do código.

Para calcular a função de transferência, devemos abrir o DSE eliminando as transições entre os estados bons, gerando uma nova matriz adjacência reduzida, $\boldsymbol{A}^*$, da forma:

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{matrix} 0 & \boldsymbol{A}'_{GB} \\ \boldsymbol{A}'_{BG} & \boldsymbol{A}'_{BB} \end{matrix}, \tag{8}$$

onde $\mathbf{0}$ é uma submatriz $n'_g \times n'_g$ com todos os elementos iguais a zero. Se $n'_g > 1$, o número de estados *bons* do DSE aberto pode ser reduzido a 1, produzindo uma nova matriz adjacência, denotada por $\boldsymbol{B}$, de dimensão $L_b \times L_b$, onde $L_b = 1 + n'_b$, dada por (SHI; WESEL,2004) :

$$\boldsymbol{B} = \begin{matrix} \boldsymbol{B}_{GG} & \boldsymbol{B}_{GB} \\ \boldsymbol{B}_{BG} & \boldsymbol{B}_{BB} \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & \boldsymbol{\Pi}'\boldsymbol{A}'_{GB} \\ \boldsymbol{A}'_{BG}\mathbf{1} & \boldsymbol{A}'_{BB} \end{matrix}, \tag{9}$$

Na k-ésima iteração do algoritmo SRA, $k = 2, \ldots, L_b$, o estado k é eliminado produzindo a matriz $\boldsymbol{B}(k)$ a partir da mudança de alguns elementos de $\boldsymbol{B}(k-1)$, como descrito a seguir. Seja $b_{i,k}^{(k-1)}$ o (i,k)-ésimo elemento de $\boldsymbol{B}(k-1)$. Para cada $i \neq k, i = 1, \ldots, L_b$, tal que $b_{i,k}^{(k-1)} \neq 0$ e para cada $j \neq k, j = 1, \ldots, L_b$, tal que $b_{i,k}^{(k-1)} \neq 0$, o elemento $b_{i,k}^{(k)}$ é igual a (PIMENTEL,2003):

$$b_{i,j}^{(k-1)} + b_{i,k}^{(k-1)} \left(1 - b_{k,k}^{(k-1)}\right)^{-1} b_{k,j}^{(k-1)}, \tag{10}$$

A eliminação do k-ésimo estado é realizada zerando-se a k-ésima linha e a k-ésima coluna de $\boldsymbol{B}(k)$. Observe que os rótulos de todos os ramos que iniciam ou terminam neste estado foram redirecionados para outros ramos do DSE. A matriz adjacência inicial é $\boldsymbol{B}\ 1 = \boldsymbol{B}$ e a matriz no final do algoritmo, $\boldsymbol{B}(L_b)$, tem apenas o elemento (1,1) não nulo que pode ser interpretado como $\boldsymbol{B}(L_b)_{GG}$. A função de transferência pode ser calculada da seguinte forma:

$$T\ x,y\ = \boldsymbol{\Pi}'\boldsymbol{A}'_{GG}\mathbf{1} + \boldsymbol{B}(L_b)_{GG}, \tag{11}$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade de (11) deve ser empregado apenas se a treliça do codificador tiver transições paralelas. O algoritmo não utiliza inversão de matrizes levando a uma redução no esforço computacional.

Exemplo 2: A matriz reduzida (7) do Exemplo 1 produz a seguinte matriz inicial do algoritmo RSA:

$$1 = \begin{matrix} 0 & xy^4 & 0 \\ 0 & xy^2 & y^2 \\ y^4 & x & 0 \end{matrix}, \tag{12}$$

O algoritmo SRA produz a seguinte sequência de matrizes:

• Eliminação do estado 2:

$$\boldsymbol{B}\ 2\ = \begin{matrix} 0 & 0 & \frac{xy^6}{1-xy^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ y^4 & 0 & \frac{xy^2}{1-xy^2} \end{matrix}$$

• Eliminação do estado 3:

$$\boldsymbol{B}\ 3\ = \begin{matrix} \frac{xy^{10}}{1-2xy^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

A função de transferência é então calculada a partir de (11):

$$T\ x,y\ = \boldsymbol{B}(L_b)_{GG} = \frac{xy^{10}}{1-2xy^2}, \tag{13}$$

A partir da matriz adjacência reduzida $\boldsymbol{A'}$, o algoritmo SRA resume-se nos seguintes passos:
• A matriz inicial é $\boldsymbol{B}\ 1\ = \boldsymbol{B}$ dada em (9).
• Para $k = 2, \ldots, L_b$ forme a sequência de matrizes $\boldsymbol{B}\ k\ $.
• A função de transferência é dada em (11).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Uma forma de enumerar o espectro de distâncias de códigos TCM sem calcular a sua função de transferência consiste em avaliar o espectro até a *n*-ésima ordem de interesse.

Considere o conjunto ordenado $S = \{(p_i(x), d_i^2)\}_{i=1}^{n}$ de tal forma que $d_i^2 \leq d_{i+1}^2$. O polinômio $p_i(x)$ é o coeficiente de $y^{d_i^2}$ em $T(x,y)$. O espectro de distâncias de *n*-ésima ordem é calculado a partir de *S*, visto que:

$$S_A = \{(p_i(1), d_i^2)\}_{i=1}^{n}; \tag{14}$$

$$S_B = \left.\frac{dp_i(x)}{dx}\right|_{x=1}, d_i^2 \Big)_{i=1}^{n}, \tag{15}$$

Para exemplificar, seja o código TCM cuja função de transferência obtida no Exemplo 2 é dada por:

$$T\ x,y\ = \frac{xy^{10}}{1-2xy^2}, \tag{16}$$

que após a expansão em série de Taylor tem-se o espectro de distâncias de quarta ordem:

$$S_A = \ 1{,}10\ ,\ 2{,}12\ ,\ 4{,}14\ , (8{,}16)\ , \tag{17}$$

$$S_B = \ 1{,}10\ ,\ 4{,}12\ ,\ 12{,}14\ , (32{,}16)\ . \tag{18}$$

Para obtermos o limitante da união expurgado da probabilidade de erro de *bit*, faremos uma pequena modificação da Equação (2):

$$P_b \cong \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_c} B_i Q\left(\sqrt{\frac{d_i^2 R E_b}{2N_0}}\right), \tag{19}$$

onde o símbolo ≅ indica que somente alguns termos dominantes do somatório serão considerados. Estes termos serão os pares do conjunto S_B em (18) para o código TCM do Exemplo 1 e os conjuntos em (20) e (21) para o códigos TCM com 4 estados, QPSK, $k = 1$, $R = 1$ e o código TCM 8 estados, 8PSK, $k = 2$,$R = 2/3$ (BIGLIERI, 1991), respectivamente.

$$S_B = \quad 0{,}281;8\ ,\ 0{,}375;10\ ,\ 1{,}25;12\ ,\ 1{,}5;14\ ,(0{,}5;16)\ , \tag{20}$$

$$S_B = \quad \frac{3}{8},6\ ,\ \frac{9}{16},8\ ,\ \frac{5}{16},10\ ,\ \frac{5}{16},12\ ,\ \frac{5}{16},14\ \ . \tag{21}$$

A Figura 1 ilustra os limitantes expurgados obtidos com os conjuntos dados por (18), (20) e (21) dos respectivos códigos TCM citados. Na figura, os códigos correspondentes aos conjuntos de (18), (20) e (21) são identificados como TCM$^{\mathbf{1}}$, TCM$^{\mathbf{2}}$ e TCM$^{\mathbf{3}}$, respectivamente.

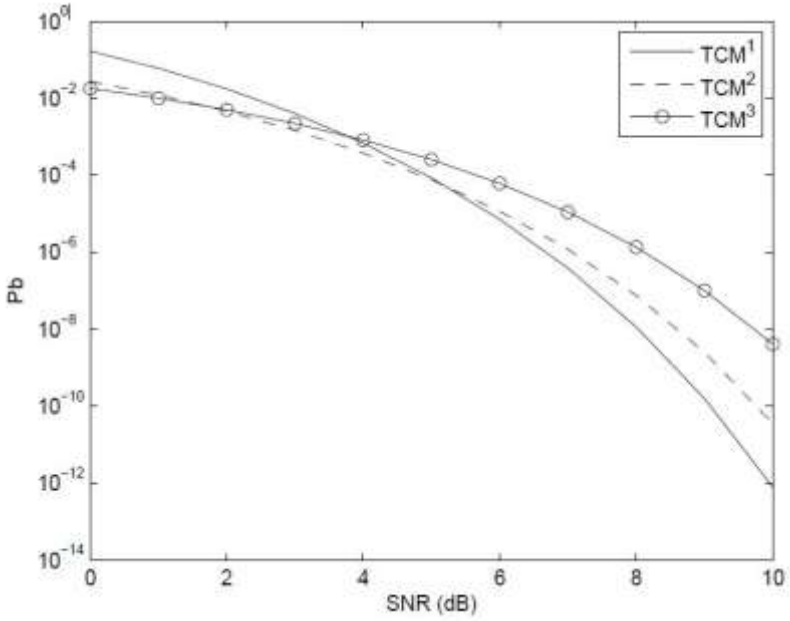

Figura 1 - Limitantes da união expurgados da probabilidade de erro de bit de codificadores TCM.

6. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um algoritmo, totalmente matricial, que enumera o espectro de distâncias de códigos TCM, obtendo a função de transferência completa do primeiro evento erro. Também foi mostrado um algoritmo que realiza um pré-processamento da matriz adjacência do DSE, que também é totalmente matricial e a partir do cálculo do espectro de distâncias foi obtido o limitante da união expurgado para a probabilidade de erro de bit. Resultados de simulações mostraram que os limitantes obtidos convergem para uma ampla faixa de relação sinal ruído. A principal vantagem dos algoritmos apresentados é a facilidade de implementação usando qualquer software de computação simbólica. É interessante notar que estes algoritmos podem ser aplicados a outras classes de códigos em treliça, incluindo os códigos TCM para canais que empregam múltiplas antenas.

REFERÊNCIAS

AKTAS ,D. K.; FITZ, M. P. **The distance spectrum of space-time trellis coded modulations in quasi-static Rayleigh fading channels**. IEEE Trans. Inform. Theory, submitted.

BENEDETTO , S.; MONDIN , M.; MONTORSI, G. **Performance evaluation of trellis-coded modulation schemes**. Proceedings of the IEEE. Junho, 1994.

BIGLIERI ,E. **High level modulation and coding for nonlinear satellite channels**. IEEE Trans. Commun. Maio, 1984.

BIGLIERI, E. P. J.; SIMON, M. K. **Introduction to Trellis- Coded Modulation with Applications**. New York: Macmillam, 1991.

PIMENTEL, C. **On the computation of weight enumerators for convolutional codes**. IEEE Trans. Commun. Março, 2003.

ROUANNE, M.; COSTELLO, D. J. **An algorithm for computing the de distance spectrum of trellis codes**. IEEE J. Sel. Areas Commu. Agosto, 1989.

SCHELEGEL, C. **Trellis Coding**. New York: IEEE Press, 1997.

SHI , J.; WESEL, R. D. **Efficient Computation of Trellis Code Generating Functions**. IEEE Trans. Commun. Fevereiro, 2004.

UNGERBOECK, G. **Channel coding with multilevel/phase signals**. IEEE Trans. Inform. Theory. Janeiro, 1982.