Massa na Teoria da Relatividade Especial: relativística ou absoluta?

Wellington Caetano[1], Rinaldo Mendes[2]

[1]Professor de Física do Campus João Pessoa – IFPB. e-mail: wellington.caetano@ifpb.edu.br
[2]Aluno do Ensino Médio Técnico Integrado em Eletrotécnica do Campus João Pessoa – IFPB. e-mail: rinaldo_mendesa@hotmail.com

Resumo: Neste trabalho estudamos a Teoria da Relatividade Especial (TRE) de Albert Einstein, com enfoque especial no conceito de massa e sua equivalência com o conceito de energia. Apresentamos as transformações de Lorentz para a dilatação do tempo e contração do espaço. A partir da equação de Einstein, $E = mc^2$, estudamos a dinâmica relativística. Em particular, a definição de quantidade de movimento (momento linear) é analisada. O termo de massa presente na equação é estudado e seu comportamento com a velocidade é descrito e simulado em gráficos, onde observamos que para um aumento de apenas 0,5% na massa relativística é necessário uma velocidade correspondente a 10% do valor da velocidade da luz. Embora a ideia de massa relativística seja de passível interpretação, a partir de uma formulação mais sofisticada da teoria da relatividade, mostramos que a massa mantém-se invariante sob as transformações de Lorentz.

Palavras–chave: energia, massa, relatividade.

1. INTRODUÇÃO

A descrição do movimento no estudo apresentado por Isaac Newton, no celebre trabalho *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (título em latim, em português pode ser lido como: "Princípios Matemáticos da Filosofia Natural", ou, simplesmente, dito *Principia Mathematica*) apresenta o tempo como uma quantidade absoluta, sendo invariantes suas medidas para dois observadores independentes, que podem estar ou não, em movimento relativo entre si.

Nos estudos de Galileu e Newton, e seguidos ao longo de cerca de três séculos, o tempo presente nas equações era "apenas um parâmetro", tal qual uma constante adimensional.

As consequências matemáticas e físicas desta hipótese são que quantidades como a energia e a massa, além de não apresentarem a mesma natureza, pois não há uma relação de equivalência entre elas, são de observação relativa. A medida destas grandezas está relacionada ao estado de movimento do observador, possibilitando uma gama de valores diferentes para a mesma quantidade física.

Por outro lado, embora as equações do movimento derivadas por Newton permanecessem absolutas no estudo da Mecânica, no século XIX, o físico e matemático escocês James Clerk Maxwell, publicou, entre 1861 e 1862, o trabalho intitulado *On Physical Lines of Force* (em português, *Acerca das linhas físicas de força*), onde apresentou as leis físicas e matemáticas do chamado eletromagnetismo clássico. Inclusive, a forma matemática da força de Lorentz (força resultante da ação de campos elétricos e magnéticos) foi apresentada neste tratado.

As equações de Maxwell mostraram então que o eletromagnetismo era variante sob as transformações de Galileu. Isto é, suas equações apontavam para a física diferente em pontos diferentes do espaço, embora fossem mensuradas as mesmas quantidades elétricas nestes pontos.

A óptica neste problema foi vislumbrada graças ao desenvolvimento matemático das chamadas transformações de Lorentz. A transformação de Lorentz foi originalmente o resultado da tentativa de Lorentz e outros cientistas, como Woldemar Voigt, em explicar as propriedades observadas da luz propagando-se no que se presumia ser o éter. Albert Einstein posteriormente reinterpreta a transformação como sendo uma consequência da natureza do espaço e tempo. A transformação de Lorentz substituiu a transformação de Galileu da física newtoniana, que assumia o espaço e o tempo absolutos. De acordo com a Teoria da Relatividade Especial (TRE), a transformação de Galileu é apenas uma boa aproximação para velocidades relativas muito menores que a velocidade da luz.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: apresentamos as transformações de Galileu baseadas nas Leis de Newton. Em seguida, após breve contato com as ideias de dilatação do tempo e contração do espaço, as equações relativísticas de Einstein são abordadas; através de uma abordagem

ISBN 978-85-62830-10-5

gráfica, observa-se a massa dependente da velocidade e, no final, através das transformações de Lorentz, mostramos que esta quantidade de massa mantém-se invariante.

2. MATERIAL E MÉTODOS

Para a elaboração deste trabalho, foram utilizados diversos meios didáticos, proporcionando um ambiente de discussão e estudos. Realizamos encontros, onde apresentações individuais norteavam o debate e afirmação de um resultado final.

Em particular, livros de ensino médio foram revistos, os conteúdos disponíveis na internet, como em sites de livre conhecimento, foram analisados com rigor, e, finalmente, usamos material didático destinado ao público de nível superior, como os livros de Física Básica.

O recurso material disponível nas salas de aula do IFPB foi ricamente utilizado, por proporcionar uma aula integralmente conectada à internet. Dentre os quais citamos os seguintes: lousa, quadro branco, computador com internet, *data-show*.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nosso estudo está relacionado à seguinte situação física: considere dois sistemas de coordenadas S e S’, a partir de agora referenciais, em movimento uniforme relativo (com velocidade v) no eixo x, comum aos dois sistemas e os eixos y e z ortogonais ao movimento como mostra a Figura (1) abaixo. Suas origens são coincidentes no tempo t = t’ = 0.

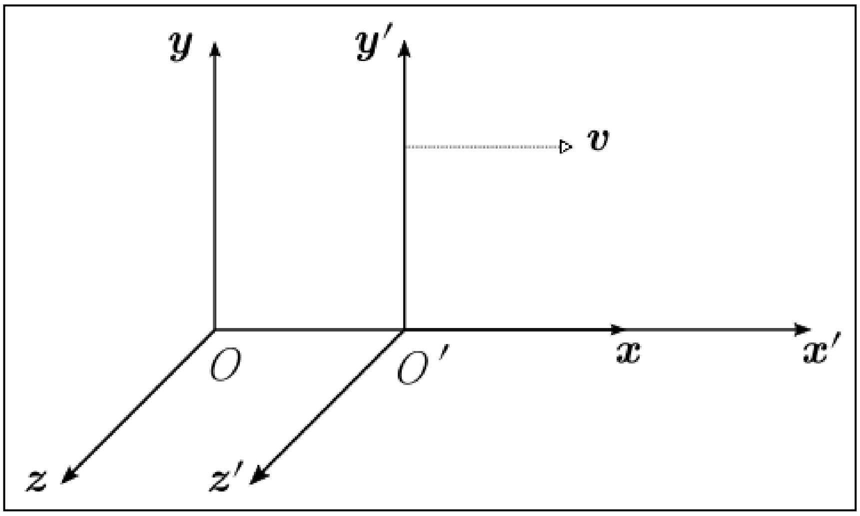

Figura 1 – Dois sistemas de coordenadas S e S’, com velocidade relativa *v* entre eles. O eixo x é comum aos dois sistemas e os eixos y e z não apresentam velocidade relativa entre si.

O conjunto de equações (1) descreve as transformações de Galileu,

$$x' = x - vt \quad (1a)$$
$$y' = y \quad (1b)$$
$$z' = z \quad (1c)$$
$$t' = t \quad (1d)$$

e mostra, principalmente, (veja Eq. 1d), que o tempo permanece invariante nos dois referenciais S e S’.

Como consequência desta invariância, tanto observadores em S quanto em S’ medirão os mesmos intervalos de tempo e, com isso, variações de comprimento – o que é compatível com a Física conhecida no regime de baixas velocidades, isto é, quando a velocidade v é muito pequena quando

ISBN 978-85-62830-10-5

comparável com a velocidade da luz c, em linguagem matemática, $v \ll c$. No momento estudo da TRE deveremos recuperar este conjunto de equações (1), como no limite apontado acima.

Enquanto as transformações de Galileu indicaram a simultaneidade entre os referencias S e S', veremos agora como as transformações de Lorentz, nas equações (2), modificam nossa interpretação sobre os conceitos de espaço e tempo,

$$t' = \gamma \ \ \mathrm{t} - \frac{\mathrm{vx}}{\mathrm{c}^2} \qquad 2\mathrm{a}$$
$$x' = \gamma \ \mathrm{x} - \ \mathrm{vt} \qquad 2\mathrm{b}$$
$$\mathrm{y}' = \mathrm{y} \qquad (2c)$$
$$\mathrm{z}' = \mathrm{z} \qquad (2d)$$

onde a letra γ, chamada de fator de Lorentz, representa um quantidade adimensional que é proporcional à velocidade relativa entre os referenciais. A expressão matemática do fator de Lorentz é dada por:

$$\gamma = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (3)$$

Se as equações (2c-d) não apresentam nenhuma novidade ao estudo, podemos destacar a mudança radical que as coordenadas x e t apresentaram. Dizemos coordenadas, pois a partir de agora é notável que o tempo, antes apenas um parâmetro na dinâmica do movimento, apresenta-se da mesma forma que as coordenadas espaciais. Esta observação levou Einstein à seguinte conclusão: nosso universo é composto não apenas de três dimensões, mas sim quatro, sendo três dimensões espaciais e uma temporal. Outra notável diferença é que as equações (2a-b) para o tempo e posição no referencial S' respectivamente são dependentes da posição e tempo no referencial S.

Finalmente, a equação (3) mostra o fator de Lorentz e ainda é possível observar que no limite de baixas velocidades $v \ll c$, o fator de Lorentz é reduzido à unidade, o que faz as Eq. (2) recuperarem o resultado das Eq. (1), como está representado nas Figuras (2a) e (2b).

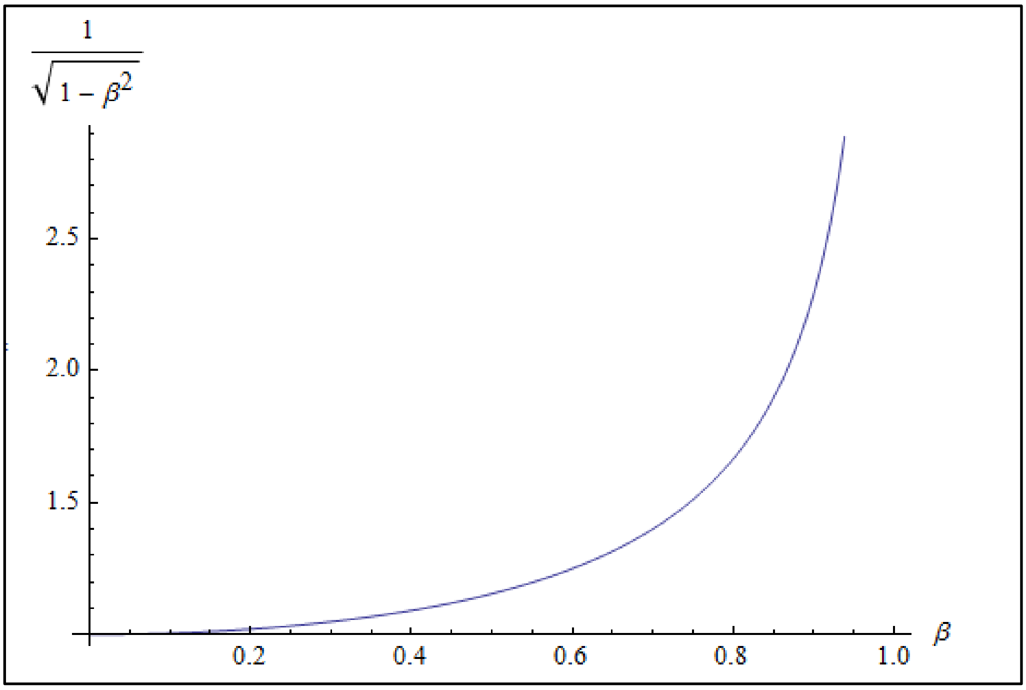

Figura 2a – Fator de Lorentz γ em função de β (razão v/c). No limite em que v → c, o fator de Lorentz tem seu valor tendendo a infinito.

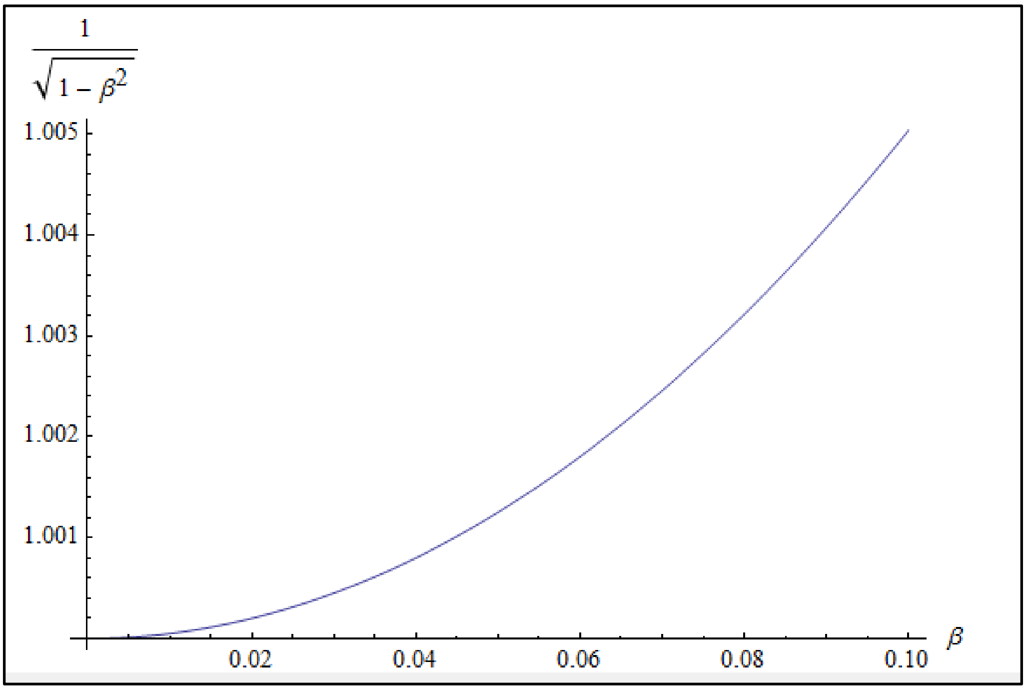

Figura 2b – Fator de Lorentz γ em função de β (razão v/c). Destaque para a região entre velocidade nula e v = 0,1c. O fator relativístico aumenta apenas 0,5% enquanto, no mesmo intervalo, a velocidade chega a 10% da velocidade da luz.

ISBN 978-85-62830-10-5

Outra grande proposta da TRE são os postulados apresentados por Einstein:

1º) As leis que governam as mudanças de estado em quaisquer sistemas físicos tomam a mesma forma em quaisquer sistemas de coordenadas inerciais.

2º) A luz tem velocidade invariante igual a c em relação a qualquer sistema de coordenadas inerciais.

Estes postulados associados às transformações de Lorentz das equações (2) levam a consequências importantes sobre as medidas de tempo e comprimento.

Sobre o tempo, a relação que envolve intervalos de tempo medidos nos referenciais S e S' é dada por:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (4)$$

A equação (4) mostra que o intervalo de tempo medido pelo observador no referencial S é sempre menor que o medido em S'. Este resultado, conhecido como dilatação temporal, leva a experimentos teóricos de resultados bastante surpreendentes, como o Paradoxo dos Gêmeos ou ainda a resultados práticos como os relógios atômicos que apresentam uma grande precisão na medida de pequenos intervalos de tempo.

No quesito espacial, observamos um resultado conhecido como contração do comprimento, que é expresso com a seguinte equação:

$$\Delta L' = \frac{\Delta L}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, \Delta L \qquad (5)$$

Por outro lado, para $v \ll c$, as Eq. (4) e (5) são simplificadas aos seguintes casos: $\Delta t' = \Delta t$ e $\Delta L' = \Delta L$. Com isso temos as equivalências entre os intervalos de tempo e comprimento nos dois referenciais, que é observada nas velocidades usuais.

Até agora vimos as equações associadas à cinemática relativística, dando uma interpretação para o tempo e o comprimento quando o movimento apresenta-se em velocidades grandes, i.é, quando $v \sim c$.

A dinâmica relativística é apresentada através da chamada relação de Einstein que envolve os conceitos de massa e energia,

$$E^2 = p^2c^2 + \mathrm{m}_0^2\mathrm{c}^4 \qquad (6)$$

onde p significa o momento linear da partícula (classicamente, definido como quantidade de movimento Q = mv) e m_0 é o termo relacionado à massa, chamado comumente de massa de repouso. De fato, se tivermos uma situação com velocidade nula, o momento linear anular-se-á e com isso a Eq. (6) será reduzida à mais famosa das equações de Einstein, quiçá da Física:

$$E = \mathrm{m}_0\mathrm{c}^2 \qquad (7)$$

Neste ponto, abordaremos a questão do momento (adiante, será entendido que momento significa momento linear ou ainda quantidade de movimento), que está intimamente relacionado ao conceito de massa. Se na mecânica clássica não relativística, a quantidade de movimento era definida pelo produto entre a massa e a velocidade, agora devemos levar em conta o fator de Lorentz γ. Então, o momento é definido como:

$$p = \gamma \mathrm{m}_0 \mathrm{v} \qquad (8)$$

ISBN 978-85-62830-10-5

o que possibilita a interpretação de que a massa é uma quantidade variável com a velocidade, criando uma grandeza chamada "*massa relativística*" $m \equiv \gamma m_0$ de modo a manter preservada a forma clássica do momento, ou seja, $p = mv$.

A interpretação da massa como uma variável com a velocidade implica diretamente em uma dependência proporcional ao fator de Lorentz, como mostra a Figura (3) abaixo:

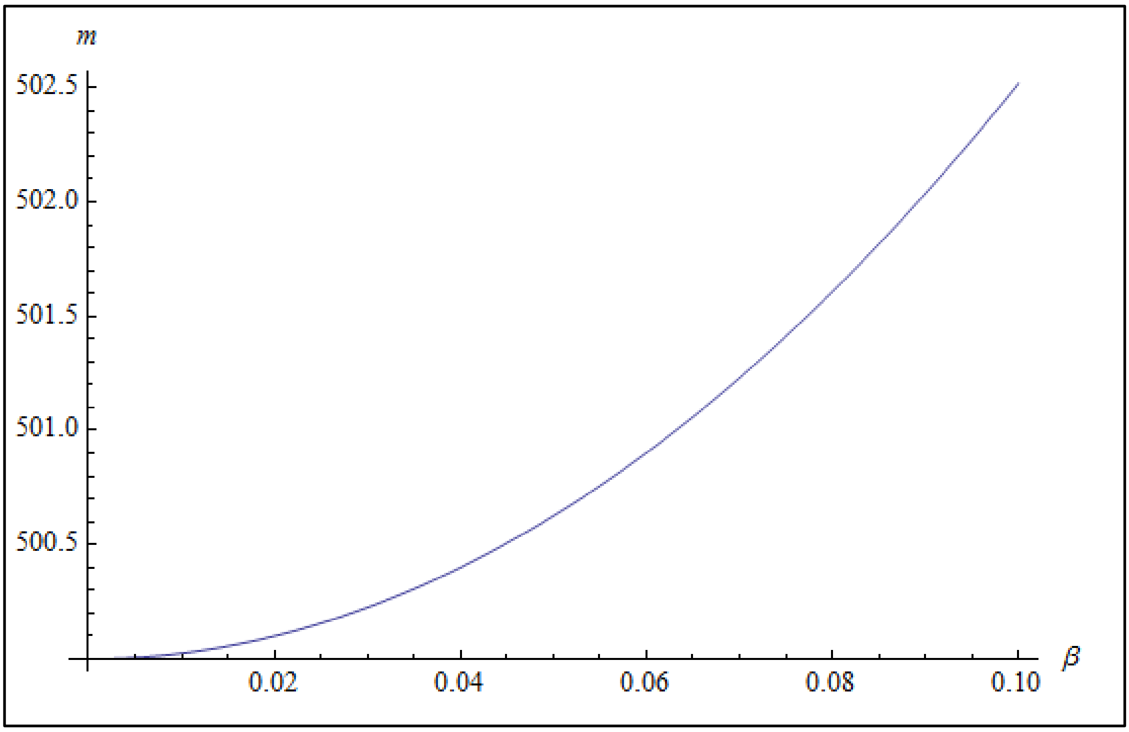

Figura 3 – Massa relativística em função do aumento do fator relativístico (β). Como a massa relativística depende de γ, o gráfico evidencia seu aumento com a velocidade. A massa de repouso (de valor inicial) utilizada para elaborar este gráfico tem valor m_0 = 500Kg.

O comportamento da chamada massa relativística, figura (3) acima, está de acordo com a equação $m \equiv \gamma m_0$, garantindo esta interpretação. Novamente observa-se que o aumento de 0,5% no valor da massa é correspondente a um valor de velocidade igual a 10% à velocidade da luz, o que tornaria o efeito de massa relativístico sensível, neste caso, apenas às velocidades superiores aos 30.000 Km/s, tornando seus efeitos bastante suprimidos nas velocidades quotidianas.

No entanto, devemos observar que o termo massa de repouso m_0, apesar de apropriado neste gráfico, indica então que a massa, ao depender da velocidade, pode aumentar indefinidamente com o fator de Lorentz. Mas, ao analisar o limite superior para o fator de Lorentz,

$$\lim_{v \to c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \to \infty \qquad (9)$$

encontra-se infinito como limite superior. Neste caso, como já indicada na figura (2a), quando a velocidade v se aproxima da velocidade da luz, o fator de Lorentz γ tende a infinito. Mas tal comportamento pode ser estendido à massa? Noutras palavras, pode-se perguntar: a massa pode ter mesmo comportamento relativístico, ou será absoluto?

Algumas se passaram após a proposição da massa relativística, com desenvolvimento da Física de Partículas e experimentos para observar decaimentos de partículas "pesadas", viu-se que a massa

ISBN 978-85-62830-10-5

não poderia ser invariante. No caso da massa ser relativística, quando seu valor tende a infinito não poderíamos ter uma desintegração em qualquer partícula de massa menor. Do contrário, observaríamos uma partícula “leve” tornando-se uma “pesada” após ser acelerada.

Historicamente, o conceito de massa relativística foi caindo em desuso gradualmente em Física desde 1950, quando partículas físicas mostraram a relevância da massa invariante, ao ponto que a massa relativística é praticamente sem uso na literatura científica moderna. Entretanto, material do início da década de 20, fez o nome *massa relativística* ficar popular em discussões e ainda é encontrado em livros hoje em dia.

Para finalizar, escreveremos a notação mais sofisticada que coloca energia e momento linear na mesma estrutura matemática, chamada quadrivetor[1] do momento, que pode ser representada como:

$$p^{\mu} = \frac{E}{c}, -p \qquad (10)$$

onde o símbolo μ representa que o quadrivetor do momento tem quatro componentes (μ = 0,1,2,3), sendo a primeira relacionada à energia $\frac{E}{c}$ e as outras três à quantidade de movimento $p,$ nas direções de x, y e z.

Quando tomamos o quadrado do momento, isto é, realizamos o produto de $p^{\mu}p_{\mu}$ obtemos,

$$p^{\mu}p_{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2c^2 \qquad (11)$$

onde a última igualdade deve-se à relação de Einstein, Eq. (6). O índice μ, também chamado de índice de Lorentz, significa que esta quantidade é transformada de acordo com o referencial adotado. No entanto, quando se toma o quadrado de p^{μ}, os índices podem ser sumarizados, com isso, no lado direito da equação notamos suas ausências. O que implica em uma quantidade que não depende dos índices, ou seja, invariante sobre as transformações de referenciais. Por fim, vale ressaltar que o quadrado da velocidade da luz presente na equação é invariante, uma vez que a própria velocidade da luz c é invariante. O produto de duas grandezas invariantes $m_0^2c^2$ implicará em um resultado que não depende do referencial adotado. Com isso mostramos que a massa é uma quantidade absoluta.

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho, ao estudar Teoria da Relatividade, através de um processo histórico-didático, reproduzimos resultado como a interpretação da massa relativística, oriundo da velha teoria da Física Moderna. A variação da massa com a velocidade foi estudada, em particular, o comportamento da massa em função do Fator de Lorentz foi simulado em gráficos. Os resultados obtidos apontavam uma dependência linear, no entanto, esta era capaz de promover valores infinitos de massa – o que colocaria em xeque o Princípio de Conservação da Energia, uma vez que partículas de pequena massa poderiam decair em partículas mais massivas, se aceleradas à velocidades relativísticas. Através do produto de quadrivetores para o momento, a interpretação final que analisamos sugeria uma massa absoluta. Para finalizar citamos o progresso científico/tecnológico que o desenvolvimento da TRE proporcionou no último século. Apenas para lembrar: a internet que usamos hoje teve origem nos experimentos que usavam as partículas elementares (já entendidas com massa absoluta!) para promover a comunicação entre laboratórios e também transferência de dados.

[1] Na relatividade, quadrivetor é um vetor no espaço de Minkowski (tetradimensional e real) que, sob uma transformação de Lorentz, comporta-se como as coordenadas do espaço-tempo (*t, x, y, z).* Para uma leitura aprofundada sugere-se um livro de Teoria de Campos, como J. Leite Lopes, A estrutura quântica da matéria, UFRJ editora, 2ª. Ed. 1993.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao pessoal do campus João Pessoa, do Instituto Federal da Paraíba (IFPB) pelo ambiente proporcionado para a realização deste trabalho que está dentro de um grupo maior de estudos - o GEAFís (Grupo de Estudos Avançados em Física). Esta discussão inicial sobre relatividade inicia os trabalhos que serão desenvolvidos juntos aos alunos do IFPB, no campus João Pessoa.

REFERÊNCIAS

GAMOW, G. **O incrível mundo da física moderna**. São Paulo: Ibrasa, 1980.

RESNICK, R, .HALLIDAY, D. **Fundamentos de Física.** Vol. 4 Física Moderna, 7ª Ed., LTC 2006.

NUSSENZVEIG, M. **Física Básica**. 4 v. Rio de Janeiro: Edgard Blucher, 2002.

RELATIVIDADE restrita. In: Wikipédia, 2012: enciclopédia livre. Wikimédia, 2012. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Relatividade_restrita> Acesso em: 08 jul. 2012.

SPECIAL relativity. In: Wikipédia, 2012: enciclopédia livre. Wikimédia, 212. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Special_relativity> Acesso em: 08 jul. 2012.

ISBN 978-85-62830-10-5