



## Método de Propagação de Ondas em Guias de Ondas Ópticos

Arnaldo Pinheiro de Azevedo Júnior<sup>1\*</sup>, Carlos Henrique Lima Veloso<sup>1</sup>,  
Marcelo Andrade de Sousa<sup>1</sup>, K. Z. Nóbrega<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Graduandos do curso de Engenharia Elétrica Industrial – IFMA. e-mail: marcelo\_sk8991@hotmail.com; henri\_5\_veloso@hotmail.com

<sup>1\*</sup> Graduando do curso de Engenharia Elétrica Industrial – IFMA. e-mail: arnaldoe.ifma@gmail.com, autor de correspondência

<sup>2</sup> Departamento de Eletro-eletrônica - Instituto Federal do Maranhão. e-mail: bzuzza@ifma.edu.br.

**Resumo:** No começo da década de 90 os problemas na área de eletromagnetismo em sua grande maioria se restringiam a soluções analíticas. Sendo que estas são de comum uso entre os físicos, mas com os estudos desenvolvidos posteriormente a complexidade desses problemas aumentou consideravelmente dificultando assim sua implementação na engenharia. Dessa forma fez-se necessário o desenvolvimento de métodos avançados, métodos numéricos, dentre eles destacamos o Método dos Elementos Finitos (MEF). Este método é aplicado em Equações Diferenciais Parciais (EDP) e Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), dentre os vários métodos numéricos existentes este é um dos que possuem uma implementação computacional complexa, mas em compensação possui uma robusta análise em geometrias complexas. Seu uso na análise da propagação de ondas eletromagnéticas permite até seis componentes de campo em meios lineares ou não lineares. Para implementação computacional desse método utilizou-se MATLAB uma poderosa linguagem de grande desempenho na computação técnica. Assim, dois programas computacionais foram desenvolvidos com base em um guia de ondas ópticas, um de análise modal e um propagador escalar. Os resultados obtidos das simulações nesses programas foram verificados com base na literatura de estudo deste trabalho. Obtendo assim programas capazes em analisar o comportamento de ondas eletromagnéticas em sua propagação e na obtenção do(s) modo(s) do guia de ondas.

**Palavras-chave:** eletromagnetismo, guia de ondas ópticas, método dos elementos finitos.

## 1. INTRODUÇÃO

Dentre os mais diversos campos da física a óptica apresentou um crescimento diferenciado nestes últimos anos, sendo que o desenvolvimento de tecnologias que usam a mesma como base cresceu destacadamente, como exemplo temos os guias de ondas que possuem diversas aplicações na área de telecomunicações, tornando um campo fértil em pesquisa principalmente no curso de engenharia elétrica.

Um guia de onda é "uma estrutura através da qual ondas eletromagnéticas podem ser transmitidas de um ponto a outro e dentro das quais os campos estão confinados até certo ponto" (JUNIOR, BUCK, 2003, p. 285). Este trabalho está focado em um estudo numérico introdutório de guias de ondas ópticas, especificamente. Para tanto, apenas guias bidimensionais serão aqui abordados, i.e., uma dimensão relativa à direção de propagação e outra, apenas, na seção transversal à propagação. Tal estudo revelará o formalismo inicial matemático tanto da análise modal do guia quanto também da possibilidade de se estudar a propagação de campos eletromagnéticos.



Um problema de análise modal consiste em analisar o comportamento dos modos eletromagnéticos TE (transversal elétrico), TM (transversal magnético), TEM (transversal elétrico e magnético) num guia de ondas. Tal modo é um campo elétrico que não varia ao longo da direção de propagação, que no nosso caso é representada pela direção  $z$ . Como resultado de um problema de análise modal temos o(s) modo(s) e o(s) índice(s) de refração efetivo(s) do guia, que serão utilizados na resolução do outro problema, o de propagador.

Em um problema de propagador um campo é propagado com o intuito de se analisar suas variações em relação à direção de propagação e na seção transversal do guia de onda. O fato de que apenas uma componente de campo elétrico está sendo modelada faz com que se esteja trabalhando com um propagador escalar. Em nosso artigo, todas as referências a propagador são do tipo escalar.

Ambos os problemas citados podem ser resolvidos com auxílio de métodos numéricos. São comumente usados o Método das Diferenças Finitas, Transformada de Fourier e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Este último tem mostrado bastante perícia nos resultados, estando inclusive disponível em alguns softwares comerciais como o CST, por exemplo. Infelizmente, o MEF comparado a outros métodos possui a desvantagem de sua implementação computacional ser a mais complexa entre os métodos já citados, mas em compensação seus resultados são os mais precisos.

A vantagem de utilizar métodos numéricos como o MEF na propagação de feixes é destacada por Koshiba e Tsuji em seus artigos (1996, p. 1) e (1999, p.1), mesmo há cerca de 20 anos atrás. Na resolução dos problemas citados no início desta introdução foram desenvolvidos dois programas computacionais que utilizam o MEF, utilizando para a implementação do código o MATLAB. Neste artigo, então, serão apresentadas a formulação em MEF tanto da análise modal como de um propagador escalar de ondas em estruturas bidimensionais. Na seção 2 estão descritos os fundamentos teóricos, que servem de base para o leitor que tenha interesse em iniciar-se no estudo do MEF voltado para aplicações em óptica. Já na seção 3, são apresentados alguns resultados da análise modal e do propagador e, por fim, as conclusões onde apresentamos de forma geral os objetivos alcançados.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Conforme já mencionado, um guia de onda é uma estrutura física que guia uma onda eletromagnética de um ponto a outro, confinando-a. Exemplos comuns de guias de onda são linhas de transmissão, cabo coaxial, fios condutores de eletricidade e fibra óptica.

Num problema de análise modal assim como em propagador a estrutura do guia de onda é de muita importância. Aqui trataremos de um guia de onda bidimensional como mostra a Figura 1. Nela são visíveis duas dimensões,  $y$  e  $z$ , onde  $y$  representa a região transversal à propagação e  $z$  é a direção de propagação.

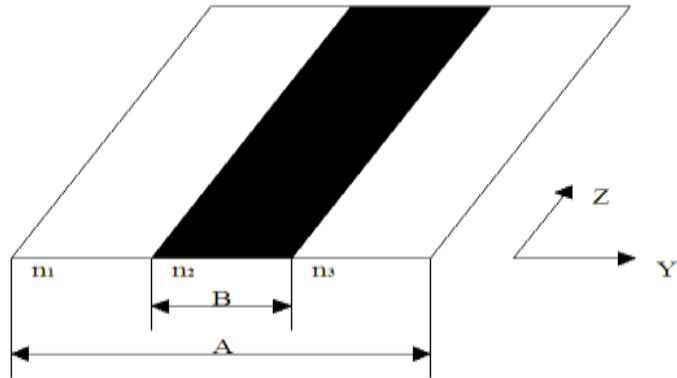


Figura 1 - Esquema geral de um guia de onda dielétrico em duas dimensões.

Partindo da Equação de Helmholtz (JUNIOR, BUCK, 2003, p. 206), que rege o comportamento de uma onda eletromagnética, e considerando  $n$  o índice de refração do material do guia,  $k_0$  o número de onda e não existindo variação na direção  $x$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ , pode-se então escrevê-la como:

$$\nabla^2 \Phi = -n^2 k_0^2 \Phi, \quad (1)$$

onde  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . De forma genérica, pode-se reescrever a Eq. 1 de forma genérica como:

$$\frac{\partial}{\partial y} p \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} p \frac{\partial \Phi}{\partial z} + k_0^2 q \Phi = 0, \quad (2)$$

onde  $\Phi = E$ ,  $p = 1$  e  $q = n^2$  para o modo transversal elétrico (TE) e  $\Phi = H$ ,  $p = 1/n^2$  e  $q = 1$  para o modo transversal magnético (TM).

Além disso, supondo a típica transformação de variação lenta,

$$\Phi(y, z) = \square(y, z) \exp(-jk_0 n_0 z), \quad (3)$$

na Eq. (2), com  $n_0$  sendo o índice de refração efetivo do guia de onda, obtemos a Eq. (4), que rege o comportamento geral de um modo TE ou TM em meios lineares, não magnéticos, guiados ou não:

$$p \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - 2jk_0 n_0 p \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} p \frac{\partial \phi}{\partial y} + k_0^2 q - n_0^2 p \phi = 0. \quad (4)$$

Todos os resultados, sejam de análise modal ou propagação, podem ser descritos a partir da Eq. (4). De fato, será nesta equação que se aplicará a discretização inerente do MEF que, em linhas gerais, consiste na divisão da estrutura em subdomínios denominados elementos, e que por sua vez são somadas todas as suas contribuições individuais para obter o valor total do campo em uma determinada seção do guia. Em seguida, apresentamos os fundamentos básicos para um melhor entendimento.



## 2.1 Discretização em Elementos Finitos

Aplicando o MEF na Eq. (4) e sabendo que o campo  $\phi$  depende de  $y$  e  $z$  podemos escrevê-lo como  $\phi(y, z) = \varphi(z)N(y)$ , com  $N(y)$  sendo as funções de base do MEF. Desta forma partindo dessas considerações chegamos à Eq. (5)

$$p \frac{\partial^2 \varphi N}{\partial z^2} - 2jk_0 n_0 p \frac{\partial \varphi N}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} p \frac{\partial \varphi N}{\partial y} + k_0^2 q - n_0^2 p \varphi N \omega dy = 0 \omega dy, \quad (5)$$

$\omega$  é uma função peso ainda desconhecida que atua sobre um domínio espacial que corresponde exatamente à geometria onde aplica-se a malha. Logo, após as tediosas manipulações algébricas da aplicação do MEF na Eq. (5), obtém-se a forma matricial representada pela Eq. (6)

$$M \frac{d^2 \phi}{dz^2} - 2jk_0 n_0 M \frac{d \phi}{dz} + K - k_0^2 n_0^2 M \phi = 0, \quad (6)$$

onde

$$K = \int k_0^2 q N \{N\}^T dy - \int p \frac{d\{N\}}{dy} \frac{d\{N\}^T}{dy} dy,$$

$$M = \int p N \{N\}^T dy,$$

onde  $N = \{N\}$ ,  $\omega = \{N\}^T$ ,  $\{\phi\}$  é o vetor global elétrico ou magnético,  $\{0\}$  é um vetor nulo,  $[K]$  e  $[M]$  são matrizes globais dos elementos finitos, podemos reescrever a Eq. (6) de forma que cheguemos a Eq. (7)

$$- 2jk_0 n_0 M \frac{d \phi}{dz} = \frac{K - k_0^2 n_0^2 M \phi}{1 - \frac{1}{2jk_0 n_0 dz}}, \quad (7)$$

isolando o termo  $\frac{d}{dz}$  obtemos a Eq. (8)

$$\frac{d}{dz} \simeq \frac{1}{2jk_0 n_0} [M]^{-1} K - k_0^2 n_0^2 M, \quad (8)$$

reescrevendo a Eq. (8), temos a Eq. (9)

$$- 2jk_0 n_0 M \frac{d \phi}{dz} + K - k_0^2 n_0^2 M \phi = 0, \quad (9)$$

onde

$$M = M + \frac{1}{4k_0^2 n_0^2} K - k_0^2 n_0^2 M. \quad (10)$$

No caso de um propagador eletromagnético, e usando algoritmo de Crank-Nicholson (KOSHIBA, TSUJI, 1999, p. 2), é conhecido o campo inicial,  $\phi_i$ , e devemos obter o próximo campo,  $\phi_{i+1}$ , onde são efetuadas as substituições  $\frac{d\phi}{dz} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta z}$  e  $\phi = \frac{\phi_{i+1} + \phi_i}{2}$  na Eq. (9) obtendo a Eq. (11)

$$[A] \{\phi\}_{i+1} = [B] \{\phi\}_i, \quad (11)$$

com

$$[A] = - 2jk_0 n_0 [M] + 0.5\Delta z K - k_0^2 n_0^2 M,$$



$$[B] = -2jk_0 n_0 [M] - 0.5\Delta z K - k_0^2 n_0^2 M ,$$

onde  $\Delta z$  é o tamanho do passo de propagação.

## 2.2 Análise Modal

Um problema de análise modal consiste na obtenção do(s) modo(s) e do(s) índice(s) de refração efetivos,  $n_0$ , do guia de ondas, para isso partimos da Eq. (4), assumindo variação nula em  $x$  e  $z$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0 \cong$  análise modal , na direção de propagação o campo é  $\phi(y, z) = \phi(y)\exp(-jk_0 n_0 z)$  dessa forma obtemos a Eq. (12)

$$\frac{\partial}{\partial y} p \frac{\partial \phi}{\partial y} + k_0^2 q \phi - n_0^2 p \phi = 0, \quad (12)$$

que pode ser organizada como

$$p \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_0^2 q \phi \omega dy = p n_0^2 k_0^2 \phi \omega dy. \quad (13)$$

Nestes termos, podemos então facilmente obter o sistema matricial expresso pela Eq. (14)

$$[A] \{\phi\} = n_0^2 [B] \{\phi\}, \quad (14)$$

onde  $[A]$  e  $[B]$  são matrizes globais do MEF em nosso problema, que possuem a forma:

$$A = \int k_0^2 q N \{N\}^T dy - \int p \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial y} dy,$$

$$B = \int p k_0^2 N \{N\}^T dy.$$

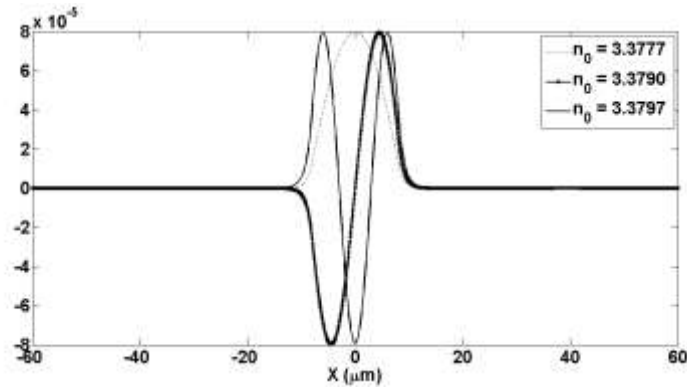
A Equação (14) é um problema de autovalor e autovetor, como solução desse problema encontramos o(s) modo(s), autovetor(es), e o(s) índice(s) de refração efetivo(s),  $n_0$ , autovalor(es), do guia de ondas.

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

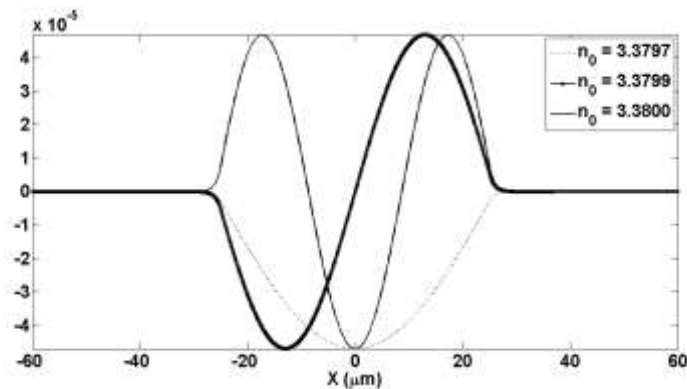
Conforme mencionado, neste artigo é mostrado o formalismo de análise de guia de ondas usando o MEF, de dois problemas: análise modal e propagador. Nestes termos começaremos nosso estudo com a análise modal. Para tanto, faz-se necessário conhecer o comprimento de onda ( $\lambda = 1,5 \mu\text{m}$ ) e o número de modos que se deseja encontrar do determinado guia. O guia em questão será o mesmo mostrado na Figura 1, considerando  $n_1 = 3,38$ ,  $n_2 = 3,37$  e  $n_3 = n_2$  e com modos TE, logo  $\Phi = E$ ,  $p = 1$  e  $q = n^2$ .

A Figura 2 (a) apresenta o resultado computacional do problema de análise modal dos três primeiros modos do guia mostrado na Figura 1 com  $A = 120 \mu\text{m}$  e  $B = 16 \mu\text{m}$ . Nela, pode-se observar que cada modo encontrado possui um índice de refração efetivo do guia ( $n_0$ ). E como podemos ver, são apresentados três modos, sendo o de menor frequência o modo fundamental ( $n_0 = 3,3777$ ), além das distribuições características dos três primeiros modos.

Uma outra situação também foi ilustrada na Figura 2 (b), semelhante à Figura 2 (a) e que mostra a análise modal dos três primeiros modos de outro guia mas agora com  $A = 120 \mu\text{m}$  e  $B = 50 \mu\text{m}$ . Nela pode-se observar, também que, o modo de menor frequência ( $n_0 = 3,3797$ ) é o modo fundamental. Neste segundo guia considera-se também  $n_1 = 3,38$ ,  $n_2 = 3,37$  e  $n_3 = n_2$ .



**Figura 2 (a)** – Análise modal dos três primeiros modos. Com  $A = 120 \mu\text{m}$ ,  $B = 16 \mu\text{m}$ ,  $\lambda = 1,5 \mu\text{m}$ ,  $n_1 = 3,38$ ,  $n_2 = 3,37$  e  $n_2 = n_3$ .



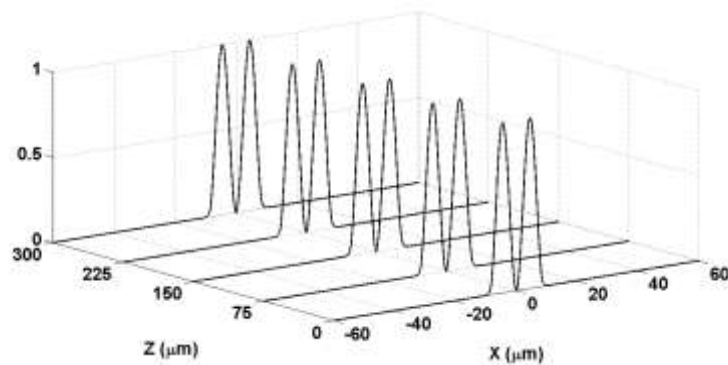
**Figura 2 (b)** – Análise modal dos três primeiros modos. Com  $A = 120 \mu\text{m}$ ,  $B = 50 \mu\text{m}$ ,  $\lambda = 1,5 \mu\text{m}$ ,  $n_1 = 3,38$ ,  $n_2 = 3,37$  e  $n_2 = n_3$ .

A partir de uma ferramenta como esta aqui apresentada, poder-se-ia facilmente utilizar o analisador modal como forma de tirar outros parâmetros do guia de onda tais como dispersão do mesmo, curva modal, etc. Entretanto, por questões de simplicidade, estas não foram aqui colocadas.

Numa segunda parte dos resultados, foi implementado o propagador, que possibilita diversos campos iniciais a serem propagados. Nos exemplos seguintes, apenas alguns casos mais usuais foram analisados, conforme veremos.

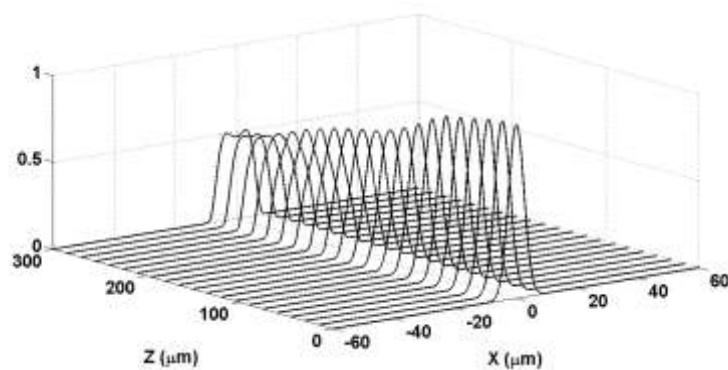
Assim como foi feito na análise modal, o propagador de uma onda eletromagnética necessita de alguns parâmetros de entrada. São eles: comprimento de onda ( $\lambda$ ), índice de refração efetivo do guia ( $n_0$ ), feixe a ser propagado, distância de propagação ( $L$ ) e o passo de propagação ( $\Delta z$ ).

Na Figura 3 vemos a propagação do modo de segunda ordem do guia de onda. O meio propagado é não-homogêneo. Os parâmetros citados a priori são descritos nas legendas de cada figura. Nessa figura pode-se observar a comprovação do que já havia sido dito anteriormente. Os modos, não importando sua ordem, sendo propagados não sofrem variação ao longo de  $z$ .



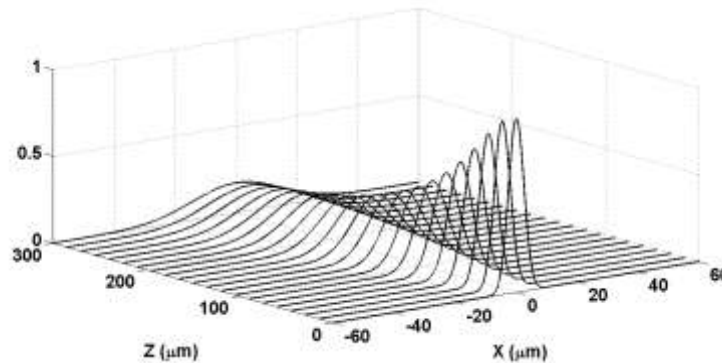
**Figura 3** – Propagação do modo de segunda ordem. Com  $\lambda = 1,5 \mu\text{m}$ ,  $n_0 = 3,3790$ ,  $\Delta z = 150 \text{ nm}$ ,  $\omega_0 = 4,5 \mu\text{m}$ ,  $L = 300 \mu\text{m}$ .

Na Figura 4, os parâmetros do guia de onda são os mesmos da figura 3, entretanto, nela está sendo propagada uma onda que não é um modo, mas uma distribuição gaussiana de campo descrita como  $\exp(-(x/\omega_0)^2)$ , onde  $\omega_0 = 5 \mu\text{m}$ , e  $n_0 = 3,397$ . Nesta figura observa-se claramente o comportamento diferenciado da onda gaussiana, se comparada ao modo, tendo em vista que aquela deve se adaptar ao guia de onda, em outras palavras, sofre nítida variação no comportamento transversal ao longo da propagação.



**Figura 4** – Propagação de feixe (Gaussiana) em meio não-homogêneo. Com  $\lambda = 1,5 \mu\text{m}$ ,  $n_0 = 3,397$ ,  $\Delta z = 150 \text{ nm}$ ,  $\omega_0 = 5 \mu\text{m}$ ,  $L = 300 \mu\text{m}$ .

Por fim, na Figura 5, ilustrando a potencialidade do propagador, foi propagado novamente uma onda gaussiana com os mesmos parâmetros da figura anterior, entretanto supondo agora um meio homogêneo (semelhante ao ar), tendo em vista que  $n_0 = n = 1$ . Observa-se claramente o comportamento diferenciado dos casos anteriores. Isso acontece tendo em vista que a propagação deste tipo de onda, não guiada, irá sofrer bastante o efeito da difração, o que está de acordo com a Teoria da Difração, inclusive na acuracidade dos resultados obtidos, quando comparados à resposta analítica facilmente obtida em livros.



**Figura 5** – Propagação de feixe (Gaussiana) em meio homogêneo. Com  $\lambda = 1,5 \mu\text{m}$ ,  $n_0 = 1$ ,  $\Delta z = 150 \text{ nm}$ ,  $\omega_0 = 5 \mu\text{m}$ ,  $n = 1$ ,  $L = 300 \mu\text{m}$ .

#### 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi proposta uma explicação simples e didática do analisador modal e do propagador. Em ambos os casos foi feita uma detalhada explicação teórica fazendo uso do Método dos Elementos Finitos, contemplando desde uma formulação teórica até a análise dos resultados computacionais, onde no analisador modal encontramos os respectivos modos de um guia de ondas e o seu índice de refração efetivo e no propagador encontramos sucessivos campos atuantes em  $y$  ao longo da direção de propagação  $z$ , tanto em um guia de onda como em um meio homogêneo.

#### REFERÊNCIAS

JUNIOR, W. H. H.; BUCK, J. A. **Eletromagnetismo**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2003.

KOSHIBA, M.; TSUJI, Y. A Wide-Angle Finite-Element Beam Propagation Method. **IEEE Photonics Technology Letters**, v. 8, n. 9, sept. 1996.

KOSHIBA, M.; TSUJI, Y. A Wide-Angle Finite Element Beam Propagation Method with Perfectly Matched Layers for Nonlinear Optical Waveguides. **IEEE Journal of Lightwave Technology**, v. 17, n. 10, oct. 1999.

NÓBREGA, K. Z. **Formulação em elementos finitos para estruturas ressonantes fotônicas**. 2004. 122p. Tese (Doutorado em Engenharia) - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.