

PRÉDIOS SOB AÇÃO DE TERREMOTO: ANÁLISE E PROJETO DE SISTEMA DE CONTROLE

Denner Cirqueira Costa¹, Wallysonn Alves de Souza²

¹Estudante do Curso Superior de Engenharia Civil – IFTO. Bolsista do PICME - CNPq. e-mail: <dennercirqueira@hotmail.com>

²Professor de Matemática e Doutor em Engenharia Elétrica – IFTO – Campus Palmas. e-mail: <wallysonn.souza@ifto.edu.br>

Resumo: Este trabalho apresenta uma pesquisa bibliográfica a respeito da teoria de estabilidade de Lyapunov e suas consequências na fundamentação da teoria clássica e moderna de controle. Neste sentido, tem-se o objetivo de mostrar a eficiência da metodologia moderna de análise e síntese de controladores, baseada em desigualdades matriciais lineares – LMIs (Linear Matrix Inequalities), com a exigência de taxa de decaimento. Para confirmar a eficiência da metodologia apresentada foi projetado um sistema de controle para o sistema Shake Table II + Active Mass Dumper 1, desenvolvido pela Quanser. O sistema é um protótipo de prédio de um andar sofrendo oscilações laterais, simulando a ação de um terremoto. As simulações numéricas apresentadas foram realizadas no software MATLAB e evidenciam a eficiência da metodologia apresentada.

Palavras-chave: Desigualdades Matriciais Lineares – LMIs, Estabilidade de Lyapunov, Sistemas Lineares, Terremotos.

1 INTRODUÇÃO

A teoria de estabilidade por meio de equações diferenciais teve início com Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) com a defesa de sua tese de doutorado em 1892, o que vem a ser hoje o que conhecemos como teoria de estabilidade de Lyapunov, ou simplesmente, estabilidade no sentido de Lyapunov. O estudo dessa teoria cresceu e despertou um grande interesse no período da Guerra Fria quanto à análise de estabilidade e síntese de controladores para o movimento de espaçonaves e mísseis, regidos por equações diferenciais fortemente não lineares. Surge assim, a chamada teoria clássica de controle.

Conforme afirma (OGATA, 2010, p.2), a partir de 1960, com a disponibilidade dos computadores digitais surge a teoria de controle moderno. Neste contexto, surge as desigualdades matriciais lineares – LMIs (Linear Matrix Inequalities) que é basicamente uma releitura do Teorema de Lyapunov. Recentemente as LMIs tem sido muito utilizadas para resolver problemas de sistema de controle de ordem teórica, acadêmica e prática, em várias áreas do conhecimento, em especial nas engenharias como pode ser visto, por exemplo, em (SOUZA, 2013; BUZACHERO, 2014).

Este trabalho tem um objetivo de apresentar a aplicabilidade da teoria de Lyapunov, com a utilização das LMIs propostas em (BOYD et al., 1994), no controle de estabilidade de prédios sob ação de terremotos. Nota-se que a pesquisa é relevante, visto que em vários locais do mundo como, por exemplo, no círculo de fogo do pacífico, localizada no norte do oceano pacífico, é praticamente impossível construir prédios sem levar em consideração abalos sísmicos, ou seja, a possibilidade de terremotos.

Assim, foram projetados e simulados dois sistemas de controle, com e sem taxa de decaimento, para o protótipo de um prédio de um andar, com um controlador sob esse andar, o sistema Shake Table II + Active Mass Damper 1 (QUANSER, 2012).

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2, é realizado um breve estudo da estabilidade no sentido de Lyapunov; em seguida, na seção 3, é definido o conceito de LMIs seguindo a linha de (BOYD et al., 1994) e, depois, na seção 4, utiliza-se o conceito de estabilidade de Lyapunov para estabelecer condições, baseadas em LMIs, que garantem a estabilidade de um sistema linear de equações diferenciais. O projeto de um sistema de controle para o dispositivo Shake Table II + Active Mass Damper 1, e as simulações computacionais do mesmo são apresentadas na seção 5. Por fim tecemos nossas considerações finais.

2 ESTABILIDADE DE LYAPUNOV

De acordo com Lyapunov, o termo estabilidade está relacionado com a capacidade de um determinado ponto atingir um equilíbrio.

Considere o sistema linear autônomo:

$$\dot{x} = Ax(t) \quad (1)$$

O ponto de equilíbrio do sistema (1) é um ponto x_e tal que $\dot{x} = 0$.

Definição 2.1: Diz-se que um ponto de equilíbrio x_e , do sistema (1) é estável no sentido de Lyapunov se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que, para toda condição inicial $x_0 = x(0)$

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon.$$

Definição 2.2: Diz-se que um ponto de equilíbrio x_e , do sistema (1) é globalmente assintoticamente estável, no sentido de Lyapunov, se ele for estável e, além disso, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tem-se $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$.

Ao considerar um sistema linear, presume-se que existe apenas um ponto de equilíbrio, a origem. Logo, se um sistema for estável, terá um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, pois suas soluções convergirão para a origem.

Teorema 2.1: Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio $x = 0$, do sistema (1), seja globalmente assintoticamente estável é que exista uma matriz P , simétrica definida positiva ($P > 0$), tal que:

$$A^T P + PA > 0. \quad (2)$$

2.1 Desigualdades Matriciais Lineares

Definição 2.3: *Uma Desigualdade Matricial Linear - LMI é uma expressão da forma:*

$$F(x) \equiv F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0 \quad (3)$$

em que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é o vetor de variáveis de decisão; $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i=0, \dots, n$, são matrizes constantes simétricas, ou seja, $F_i = F_i^T$.

Um exemplo de LMI com variável matricial é a desigualdade de Lyapunov, dada em (2).

Nem todo resultado da teoria de controle aparece diretamente na forma de LMI, como a equação de Lyapunov. Mas algumas ferramentas da álgebra matricial ajudam a transpor estes resultados para uma formulação de desigualdades matriciais lineares (ALVES, 2017).

3 ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES REALIMENTADOS VIA LMI

Considere o sistema linear invariante no tempo descrito na forma de espaço estado,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (4)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada do sistema. Agora, assumindo que todos os estados estejam disponíveis para realimentação, uma lei de realimentação dos mesmos pode ser dada por:

$$u(t) = -Kx(t), \quad (5)$$

sendo K uma matriz controladora de elementos contantes com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Substituindo (5) em (4), tem-se o seguinte sistema com característica de realimentação de estado:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (6)$$

Teorema 3.1: *Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio $x=0$, do sistema realimentado (6), seja assintoticamente estável é que exista uma matriz P , simétrica positiva definida, tal que:*

$$X > 0 \quad (7)$$

$$A^T + AX - BM - M^T B^T > 0 \quad (8)$$

se as LMIs (7) e (8) forem factíveis o ganho do controlador é dado por $K = M X^{-1}$.

3.1 Taxa de Decaimento Para Sistemas Com Realimentação de Estados

Um índice de desempenho que normalmente se exige de um sistema controlado é a velocidade de resposta que o sistema oferecerá, essa resposta está associada com a taxa de decaimento α .

Teorema 3.2: *O sistema linear realimentado (6) é quadraticamente estabilizável, com taxa de decaimento maior ou igual a α se, e somente se, existe uma matriz simétrica definida positiva*

$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que, as seguintes LMIs são factíveis.

$$X > 0 \quad (9)$$

$$X A^T + AX - BM - M^T B^T + 2\alpha X > 0 \quad (10)$$

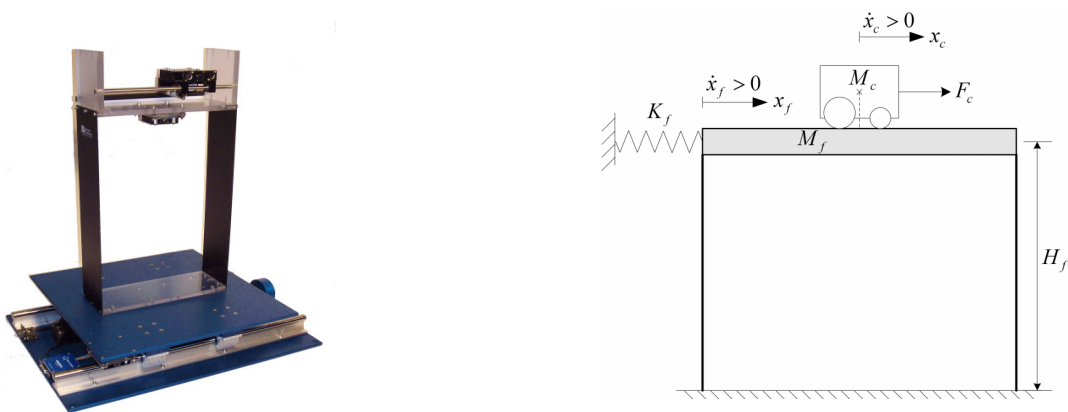
Se as LMIs (9) e (10) forem factíveis o ganho do controlador é dado por $K = M X^{-1}$.

4 SISTEMA SHAKE TABLE II + ACTIVE MASS DAMPER 1

Em determinados lugares é comum a ocorrência de terremotos, principalmente em regiões próximas aos limites de placas tectônicas, deixando uma enorme destruição onde ocorre.

Após uma parceria entre a QUANSER e a Universidade Consortium em Instructional Shake Tables (UCIST) foi desenvolvido o Shake Table II + Active Mass Damper 1, um sistema que permite simular os tremores provocados por um terremoto em um protótipo de um prédio. A partir de simulações como esta é possível desenvolver sistemas de controle e estabilidade para atuarem em prédios reais sob a ação de terremotos.

Figura 1 - Shake Table II + Active Mass Damper; Representação esquemática do sistema



Fonte: (QUANSER, 2012)

O Active Mass Damper 1 (ADM-1) simula um prédio de um andar. É composto por duas paredes laterais em metal e no topo encontra-se o objeto de controle. Este objeto consiste em uma massa acoplada a um sistema de cremalheira que possibilita o deslocamento horizontal da mesma, simulando um sistema massa mola.

A Shake Table II consiste basicamente em um simulador de terremotos, composto por uma base acoplada à um motor que movimentava um eixo e uma segunda base, chamada de primeiro estágio que é acoplada à base por meio de trilhos laterais.

O sistema pode ser representado matematicamente da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_f \\ \ddot{x}_c \\ \ddot{x}_f \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} x_c \\ x_f \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_f \end{bmatrix} + B_0 F_c$$

Desse modo, $x_c(t)$ representa o deslocamento do carro, $x_f(t)$ o deslocamento do piso superior, suas respectivas velocidades são $\dot{x}_c(t)$ e $\dot{x}_f(t)$, e a força exercida pelo controlador f_c seja a entrada de controle.

Assim, tem-se que:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{M_c r_{mp}^2 K_f}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 (M_c + M_f)} & \frac{-r_{mp}^2 B_{eq} (M_c + M_f)}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 (M_c + M_f)} & 0 \\ 0 & \frac{-K_f (M_c r_{mp}^2 + J_m K_g^2)}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 (M_c + M_f)} & \frac{M_c B_{eq} r_{mp}^2}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 (M_c + M_f)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{r_{mp}^2 B_{eq} (M_c + M_f)}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 (M_c + M_f)} \\ \frac{-M_c r_{mp}^2}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 (M_c + M_f)} \end{bmatrix}$$

$$F_c = -\frac{n_g K_g^2 n_m K_t K_m \dot{x}_c(t)}{r_m r_{mp}^2} + \frac{n_g K_g n_m K_t V_m}{R_m r_{mp}}$$

Na Tabela (1) apresentam-se os valores das constantes do sistema ADM-1.

Tabela 1 – Parâmetros do ADM 1

Descrição	Representação	Valor
Tensão do motor	V_m	-
Resistência de armadura do motor (ω)	R_m	2,6
Constante de torque do motor (N.m/A)	K_t	0,00767

Eficiência eletromecânica do motor	n_m	1
Constante de eficiência do motor (V.s/rad)	K_m	0,00767
Eficiência do redutor planetário	n_g	1
Altura do patamar superior (m)	H_f	0,5334
Massa do patamar superior (kg)	M_f	1,38
Constante da mola para a modelagem (N/m)	K_f	500,9
Inércia do rotor (kg.m ²)	J_m	$3,9 \times 10^{-7}$
Massa total do carro (kg)	M_c	0,65
Relação da engrenagem	K_g	3,71
Raio do pinhão	r_{mp}	$6,5 \times 10^{-3}$
Coeficiente de amortecimento viscoso (N.s/m)	B_{eq}	3

Fonte: (QUANSER, 2012)

Como F_c depende de $\dot{x}_c(t)$ opta-se por fazer com que a entrada seja a tensão do motor V_m . Logo, tem-se as matrizes A e B, de acordo com a Tabela (1), da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 278,9341 & -18,6497 & 0 \\ 0 & -336,0626 & 5,9716 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,9975 \\ -0,9598 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Desse modo, o sistema pode ser escrito como em (4), ou seja,

$$\dot{x} = Ax + BV_m, \quad (12)$$

sendo $x = [x_c \quad x_f \quad \dot{x}_c \quad \dot{x}_f]^T$.

4.1 Simulações numéricas: Massa Ativa

Segundo o Active Mass Damper - One Floor: Instructor Manual (QUANSER, 2012), o deslocamento máximo do controlador no sistema deve ser de 8cm, equivalente a 0,08m. Já o sinal de controle tem a voltagem máxima igual a 10V. Por não ter acesso ao sistema em questão, as simulações foram realizadas levando em consideração apenas um deslocamento inicial do piso superior de 7 centímetros para a direita do observador, sem levar em consideração a atuação de um terremoto propriamente dito. Os testes foram realizados respeitando os limites do aparelho e, portanto, foi considerada a seguinte condição inicial $x(0) = [0 \quad 0,07 \quad 0 \quad 0]^T$.

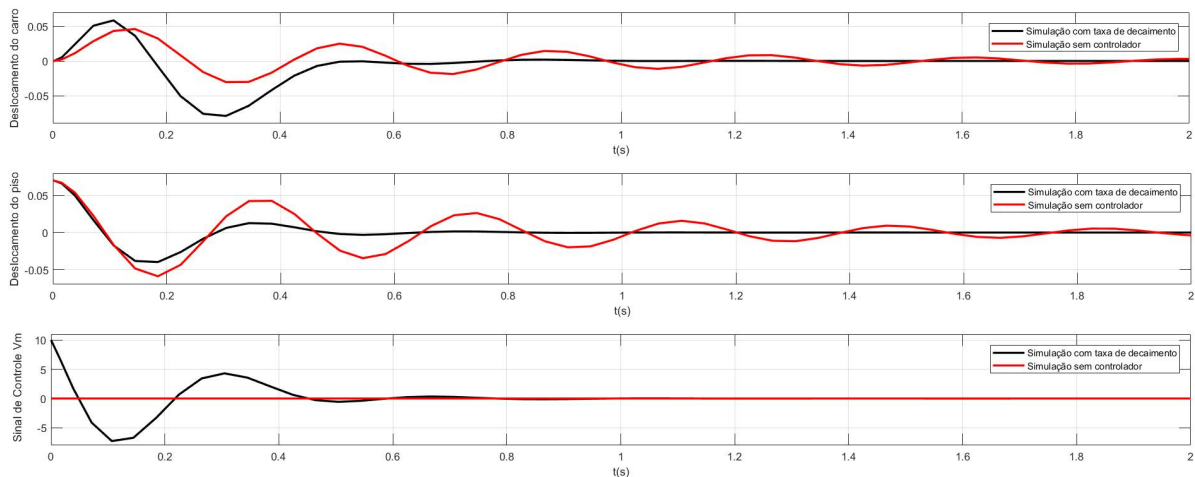
As simulações realizadas a seguir foram frutos da execução de códigos de comando no software MATLAB/Simulink, em conjunto com a utilização da linguagem do YALMIP (LOFBERG, 2004), com o solver SeDuMi (STURM, 1999).

Foi analisado o comportamento do sistema sem a atuação do controlador e com a atuação do mesmo em conjunto com um valor para a taxa de decaimento, a fim de minimizar o tempo de resposta do sistema, ou seja, diminuir o tempo necessário para que o mesmo atinja a estabilidade. Considerando as matrizes A e B dadas em (11), assim como resolvendo as LMIs (9) e (10) obtidas no Teorema (3.1), obteve-se dois resultados: na situação em que o ganho do controlador é desconsiderado, admite-se que a entrada $u=0$; já no outro caso, obteve-se a seguinte matriz de controle:

$$K = [32,8998 \quad -142,9072 \quad 1,1905 \quad -3,8525].$$

A resposta do sistema pode ser vista na Figura (4).

Figura 4 - Deslocamento do carro x_c , deslocamento do piso x_f e tensão do motor V_m do sistema controlado, com taxa de decaimento $\alpha=3,3$, e sem controle, considerando a condição inicial $x(0)=[0 \quad 0,07 \quad 0 \quad 0]^T$.



Fonte: Autor

Como observado, a melhor resposta do sistema ocorre com taxa de decaimento $\alpha=3,3$, onde o deslocamento do carro atinge seu ponto de equilíbrio em menos de 1 segundo de simulação, e o deslocamento do piso superior atinge seu equilíbrio em um tempo inferior a 1 segundo de simulação também. Observa-se ainda que há um custo ao utilizar a taxa de decaimento, já o sinal de controle atinge seu valor máximo, 10V, mas segue respeitando as especificações do produto analisado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho, que envolve duas grandes áreas da ciência como a Matemática e a Engenharia, apresentou a análise e o projeto de um sistema de controle, baseado em LMIs, para o sistema Shake Table II + Active Mass Damper 1 (QUANSER). A técnica que utiliza LMIs é moderna e é fundamentada na teoria de estabilidade de Lyapunov.

A atuação da melhor configuração para o sistema, respeitando suas especificações, pode ser visto na Figura (2). Nessas condições, observa-se que o tempo necessário para o sistema controlado, com taxa de decaimento $\alpha=3,3$, entre em equilíbrio é cerca de sete vezes menor do que o tempo gasto sem o uso do controlador, confirmando, assim, a importância e/ou vantagem de se utilizar o controlador com esse ganho de desempenho.

Vale ressaltar que, por se tratar de uma pesquisa bibliográfica, esses resultados são introdutórios e já existem muitos outros índices de desempenhos estabelecidos como, por exemplo, H_2 e, H_∞ além da possibilidade de se impor restrições na entrada e na saída do sistema e projetar controle robusto, isto é, um controlador que tem um bom desempenho mesmo considerando incertezas no sistema de equações diferenciais (incertezas na planta). Mas, o objetivo do trabalho foi explicitar a importância da teoria de estabilidade de Lyapunov na fundamentação de toda a técnica moderna de análise e síntese de controle, com aplicações em várias áreas do conhecimento.

REFERÊNCIAS

- ALVES, R. P. **Fundamentos Matemáticos da Teoria de Controle de Sistemas Lineares com Incertezas Politépicas Baseados em LMIs**. 2017. 58 p. Monografia (Matemática) – Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Tocantins, Palmas, 2017.
- BOYD, S. et al. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. 2. ed. Philadelphia: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. v. 15. (SIAM Studies in Applied Mathematics, v. 15).
- BUZACHERO, L. F. S. **Controle Robusto Chaveado de Sistemas Lineares Variantes no Tempo Com Aplicação em Falhas Estruturais**. Orientador: Edvaldo Assunção, 2014. 120 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2014.
- LOFBERG, J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN, 2004, Taipei. **Proceedings...** Taipei: IEEE, 2004. p. 284-289.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. Rio de Janeiro: Pearson Prentice Hall do Brasil, 2010.
- QUANSER. **Active Mass Damper – One Floor: Instructor Manual**. Ontário, Canadá, 2012. 22 p.
- SOUZA, W. A. de. **Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno**. Orientador: Marcelo C. Minhoto Teixeira, 2013. 92 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2013.
- STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization methods and software**. Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625-653, 1999.