

CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO: APLICAÇÃO EM PÊNDULO INVERTIDO

Alvaro Coelho Gonçalves¹, Wallysonn Alves de Souza²

¹Graduando em Engenharia Elétrica – IFTO. Campus Palmas. Bolsista do CNPq. e-mail: <alvarosilna@gmail.com>

²Matemático e Doutor em Engenharia Elétrica – IFTO. Campus Palmas. e-mail: <wallysonn.souza@ifto.edu.br>

Resumo: O presente trabalho apresenta a análise e projeto de controle robusto chaveado para sistemas lineares invariantes no tempo. A metodologia apresentada é baseada em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) e utiliza uma única função quadrática de Lyapunov para projetar os ganhos de realimentação do controlador. O controle proposto seleciona um único ganho, de um conjunto de ganhos previamente projetados, de forma que minimiza a derivada temporal da função de Lyapunov. A metodologia proposta, mesmo mantendo o conservadorismo das existentes na literatura, mostrou-se eficiente nas simulações numéricas. O que foi comprovado no projeto de um sistema de controle com incertezas politópicas para um pêndulo invertido.

Palavras-chave: Controlador chaveado; desigualdades matriciais lineares (LMIs); incertezas politópicas; controle robusto; pêndulo invertido.

1 INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento de técnicas ligadas a teoria de Lyapunov para a análise e síntese de controladores, baseados em Desigualdade Matriciais Lineares (LMIs), o final do século XX e o início deste século, foi marcado por grandes números de descobertas, sobre novas condições que garantem a estabilidade de sistemas lineares e não lineares. Além disso, devido ao grande número de problemas de caráter prático e acadêmico, tem crescido muito o interesse no estudo de sistemas chaveados (WICKS; PELETIES; DECARLO, 1994; LIBERZON; MORSE, 1999; DECARLO et al., 2000; HESPANHA; MORSE, 2002; GEROMEL; COLANERI, 2006; SOUZA et al., 2013; SOUZA et al., 2014; OLIVEIRA et al., 2014), principalmente no que diz respeito à análise de estabilidade e projeto de novos controladores, visto que, de uma forma geral, a resposta transitória de sistemas lineares invariantes no tempo pode ser melhorada ao utilizar controladores chaveados.

Recentemente, a comunidade científica tem demonstrado atenção para o estudo da análise de estabilidade e projeto de novos controladores, baseados em LMIs, com o chaveamento dos ganhos sobre a mesma planta, como pode ser visto em (SILVA et al., 2012) e (SOUZA et al., 2013).

Em (SOUZA et al., 2013), por exemplo, foi proposta uma nova metodologia de projeto de controle chaveado para uma classe de sistemas lineares com incertezas politópicas, que faz uso de uma única função de Lyapunov para projetar vários ganhos do controlador baseado em LMIs. Porém, esta metodologia de projeto de controle é limitada, visto que exige que a matriz B , matriz de controle do sistema, seja constante. Neste mesmo trabalho, a saída proposta, para o caso em que B não é constante, foi aumentar a dimensão do sistema, por meio da inserção de um integrador, ou a garantia da estabilidade uniformemente “ultimate bounded”, sob determinadas condições da matriz B .

Este trabalho tem como objetivo generalizar (SOUZA et al., 2013), propondo uma metodologia de projeto de controladores robustos chaveados.

A metodologia adotada garante a estabilidade assintótica global de sistemas lineares, com incertezas politópicas, e o controlador proposto seleciona um único ganho, que pertence a um conjunto de ganhos previamente projetados, além disso, as LMIs propostas são iguais em termos de conservadorismo às estabelecidas em (SOUZA et al., 2013) que, por sua vez, já são mais relaxadas do que as clássicas. Para comprovar a eficiência da técnica, foi projetado um sistema de controle para o pêndulo invertido e realizadas simulações computacionais. As simulações computacionais foram executadas no software Matlab, utilizando programação convexa na linguagem do YALMIP (LOFBERG, 2004) com o solver SeduMi (STURM, 1999).

Por conveniência, serão estabelecidas algumas notações que serão utilizadas neste trabalho:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_r &= \{1, 2, \dots, r\}, \quad r \in; \quad x(t) = x; \quad V(x(t)) = V; \\ (A, B, C, K)(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i, B_i, C_i, K_i), \quad \alpha_i \geq 0 \\ \text{e } \sum_{i=1}^r \alpha_i &= 1, \quad \alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]^T, \end{aligned} \quad (1)$$

sendo $r = 2^s$ e s é o número de parâmetros e/ou funções incertas distintas nas matrizes.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Esta seção traz um estudo do controle de sistemas lineares, baseado em LMI's, seguindo a linha de (BOYD et al., 1994).

2.1 Estabilidade de Sistemas Lineares Realimentados

Considere o sistema linear realimentado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu \quad (2)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle.

Suponha que todas as variáveis de estado estejam disponíveis para realimentação, uma lei de controle largamente usada na literatura (BOYD et al., 1994), é

$$u = -Kx(t), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2), tem-se

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t) = (A - BK)x(t). \quad (4)$$

Para garantir que o sistema linear realimentado (4) é estável segue o seguinte teorema.

Teorema 1. *O sistema linear (4) é quadraticamente estabilizável se, e somente se, existir uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que*

$$XA^T + AX - BM - M^T B^T \prec 0 \quad (5)$$

se (5) é factível, o ganho do controlador é dado por $K = MX^{-1}$.

A demonstração do Teorema 1 pode ser vista, por exemplo, em (BOYD et al., 1994).

O Teorema 1 garante a estabilidade do sistema realimentado (4), isto é, garantir que o sistema linear realimentado (4) seja estável é equivalente a encontrar a matriz P de Lyapunov e o ganho estabilizante K .

2.2 Estabilidade de Sistemas Lineares com Incertezas Politópicas

Seja A uma matriz que não seja precisamente conhecida. Define-se politopo de incertezas de A como sendo a combinação convexa de seus vértices, sendo considerado a combinação dos valores máximos e mínimos de cada valor e/ou parâmetro incerto. Assim, o politopo de incertezas tem 2^r vértices, sendo r o número de componentes incertos da matriz A . Matematicamente, pode-se escrever o politopo convexo da seguinte forma (LEITE et al., 2004):

$$\mathcal{A} = \{A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n} : A(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i, \text{ com } \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \text{ e } i \in \mathbb{K}_r\} \quad (6)$$

Agora, vamos considerar que o sistema (2) tenha incertezas politópicas. Assim, ele pode ser escrito como a seguir:

$$\dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)u = \sum_{i=1}^n \alpha_i (A_i x + B_i u). \quad (7)$$

Sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada do controle, $A(\alpha), B(\alpha) \in \mathcal{A}$, matrizes que representam a dinâmica do sistema, com $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Levando em consideração que todas as variáveis de estado estejam apropriadas para a realimentação, a lei de controle para realimentação de sistemas incertos será dada por (3). Substituindo (3) em (7), tem-se o sistema realimentado.

$$\dot{x} = A(\alpha)x(t) - B(\alpha)Kx(t) = (A(\alpha) - B(\alpha)K)x = \sum_{i=1}^n \alpha_i (A_i - B_i K)x \quad (8)$$

Teorema 2. *O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear com incertezas politópicas dado em (8) é globalmente assintoticamente estável, se existem uma matriz simétrica definida positiva X e uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que para todo $i \in \mathbb{K}_r$,*

$$X A_i^T + A_i X - B_i M - M^T B_i^T \prec 0. \quad (9)$$

Se as LMIs (9) são factíveis, para todo $i \in \mathbb{K}_r$, o ganho do controlador é dado por $K = M X^{-1}$.

Em (SOUZA et al., 2013) foi apresentada a seguinte lei de controle com realimentação do vetor de estado:

$$u(t) = u_\alpha(t) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i K_i x(t) = -K(\alpha)x(t), \quad K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad i \in \mathbb{K}_r. \quad (10)$$

Substituindo (10) em (7), obtém-se o sistema realimentado

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) - B(\alpha)K(\alpha)x(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j (A_i - B_i K_j)x(t). \quad (11)$$

Foi justificado que a lei de controle (10) é fictícia, visto que α_i , $i \in \mathbb{K}_r$, são parâmetros incertos que podem ser indisponíveis para medição, porém foi utilizada na análise do controlador chaveado que foi proposto.

Teorema 3. (SOUZA et al., 2013). *O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear com incertezas politópicas dado em (11) é globalmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento maior ou igual $\gamma > 0$, se existem uma matriz simétrica definida positiva X ($X \succ 0$) e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tais que, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, as seguintes LMIs sejam factíveis:*

$$X A_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T B_i^T + 2\gamma X \prec 0, \quad (12)$$

$$(A_i + A_j)X + X(A_i + A_j)^T - B_i M_j - B_j M_i - M_i^T B_j^T - M_j^T B_i^T + 4\gamma X \preceq 0, \quad i < j. \quad (13)$$

Se (12) e (13) são factíveis, os ganhos do controlador são dados por $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Demonstração. Pode ser vista em (SOUZA et al., 2013).

Teorema 4. (SOUZA et al., 2013). *Admita que as condições do Teorema 3, relativas ao sistema (7) com a lei de controle (10), sejam satisfeitas e obtenha $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$, e $P = X^{-1}$. Então, a lei de controle chaveada proposta em (SOUZA et al., 2013) torna o sistema (7) uniformemente "ultimate bounded".*

Demonstração. Pode ser vista em (SOUZA et al., 2013).

3 RESULTADOS PRINCIPAIS

Considere, agora, o sistema linear com incertezas politópicas:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x + B(\alpha)u_\nu. \quad (14)$$

Sendo $x \in \mathbb{R}^n$, $A(\alpha), B(\alpha) \in \mathcal{A}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, e $u_\nu \in \mathbb{R}^m$.

Define-se a lei de controle chaveada:

$$u_\nu = -K_\nu x, \quad K_\nu \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \nu = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{x^T Q_i x\}. \quad (15)$$

A determinação do ganho do controlador é baseado em (Souza, 2013) e seleciona um ganho, que pertence a um conjunto de ganhos $\{K_1, K_2, \dots, K_r\}$, por meio da seleção do índice

$\nu = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{x^T Q_i x\}$, sendo $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_r\}$ matrizes simétricas definidas positivas auxiliares.

Substituindo (16) em (15), tem-se:

$$\dot{x} = A(\alpha)x - B(\alpha)K_\nu x = (A(\alpha) - B(\alpha)K_\nu)x. \quad (16)$$

E para garantir que o sistema linear realimentado (17) é estável estabelece-se o seguinte teorema.

Teorema 6. *Suponha a existência de matrizes simétricas definidas positivas $X, R_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\beta < 0$ tais que, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$:*

$$A_i X + X A_i^T - \beta X + S_i + R_i \prec 0; \quad (17)$$

$$-B_i M_j - M_j^T B_i^T - S_i - R_j \prec 0. \quad (18)$$

Então a lei de controle chaveada (16) torna o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (15) globalmente assintoticamente estável, sendo $Q_i = X^{-1} R_i X^{-1}$, $P = X^{-1}$ e os ganhos do controlador dados por $K_j = M_j X^{-1}$, $j \in \mathbb{K}_r$.

4 EXEMPLOS

4.1 O Pendulo Invertido

O pêndulo invertido possui a seguinte configuração, como segue na Figura 1. A haste, tende sempre a cair, portanto, um sistema naturalmente instável. Porém, o sistema pode ser estabilizado quando uma força horizontal é aplicada sobre o corpo móvel, forçando a haste encontrar seu ponto de equilíbrio. A entrada do sistema é um sinal de tensão u , e uma força f usada para movimentar o corpo móvel horizontalmente e, como saída, a posição angular do pêndulo θ e a posição horizontal do corpo móvel x . As equações que descrevem o sistema são dadas por:

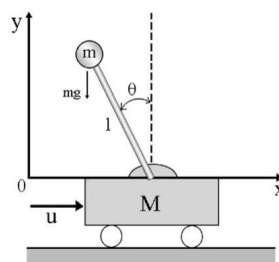
$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = f \quad (19)$$

$$ml\cos\theta\ddot{x} - ml\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta + ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = 0 \quad (20)$$

$$f = au - b\dot{x}. \quad (21)$$

Os valores das equações são explicitados na tabela 1:

Figura 1: Pêndulo Invertido



Fonte: (RIBEIRO, 2006)

Tabela 1 – Valores das constantes.

Contantes	Parâmetros	Valor Numérico
Centro de Gravidade	l	0.31 m (incerto)
Massa da haste	m	0.21 Kg
Massa do corpo móvel	M	0.4573 Kg
Aceleração da gravidade	g	9.8 $\frac{m}{s^2}$
Dados de placa	a	1.7374
Dados de placa	b	7.6832

Fonte: (RIBEIRO; 2006).

Após a linearização do sistema em torno do ponto de equilíbrio $[\dot{\theta} \ \ddot{\theta} \ \dot{x} \ \ddot{x}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, temos

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)}{Ml}g & 0 & 0 & \frac{b}{Ml} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m}{M}g & 0 & 0 & \frac{-b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{Ml} \\ 0 \\ \frac{a}{M} \end{bmatrix} u$$

4.2 Simulações Numéricas

Para a simulação foi considerado que o centro de gravidade da haste l seja uma incerteza, com valores variando no intervalo $0,29 \leq l \leq 0,31$. Da forma que as incertezas politópicas estão dispostas nas matrizes A e B, o processo produz um politopo de dois vértices. Assim, tem-se os seguintes vértices do politopo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 46.1772 & 0 & 0 & 54.1975 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4.5049 & 0 & 0 & -16.8012 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 49.3618 & 0 & 0 & 57.9353 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4.5049 & 0 & 0 & -16.8012 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -12.2585 \\ 0 \\ 3.8001 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -13.1039 \\ 0 \\ 3.8001 \end{bmatrix}.$$

Utilizando o MATLAB, com a linguagem computacional do YALMIP e o solver SeDUMIR, considerando os vértices do politopo (23) e $\beta = -2$, foram encontradas as matrizes simétricas definidas positivas P, Q_1 , Q_2 e os ganhos do controlador K_1 , K_2 utilizando o Teorema 6 proposto.

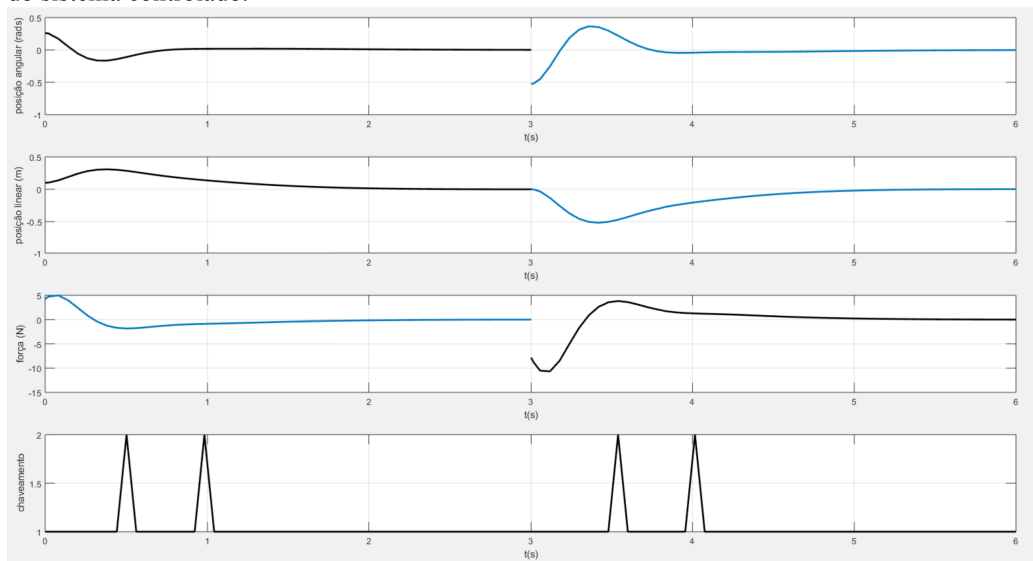
$$P = \begin{bmatrix} 0.0985 & 0.0182 & 0.0313 & 0.0286 \\ 0.0182 & 0.0039 & 0.0061 & 0.0056 \\ 0.0313 & 0.0061 & 0.0129 & 0.0104 \\ 0.0286 & 0.0056 & 0.0104 & 0.0094 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 5.0447 & 0.9410 & 1.6630 & 1.4973 \\ 0.9410 & 0.1757 & 0.3107 & 0.2797 \\ 1.6630 & 0.3107 & 0.5520 & 0.4956 \\ 1.4973 & 0.2797 & 0.4956 & 0.4456 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 5.2332 & 0.9788 & 1.7206 & 1.5514 \\ 0.9788 & 0.1833 & 0.3223 & 0.2905 \\ 1.7206 & 0.3223 & 0.5696 & 0.5121 \\ 1.5514 & 0.2905 & 0.5121 & 0.4611 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = [-14.9453 \ -2.0600 \ -3.0715 \ -7.3375], K_2 = [-14.3565 \ -1.9502 \ -2.8937 \ -7.1720]$$

Para a simulação numérica foi considerada a condição inicial $\bar{x}_1(0) = \left[\frac{\pi}{12} \ 0 \ 0.1 \ 0 \right]^T$, e após 3 segundos foi inserida uma nova condição, para simular uma perturbação no sistema depois do tempo de acomodação, $\bar{x}_2(0) = \left[-\frac{\pi}{6} \ 0 \ 1 \ 0 \right]^T$, ambas as simulações foram executadas considerando l incerto igual a $l = 0.305$, no centro de massa da haste. A posição de equilíbrio para ambas as etapas das simulações é: $x_e = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]$. Os resultados obtidos são mostrados na Figura 1.

Figura 2: Posição angular, posição linear, sinal de controle chaveado e índice de chaveamento do sistema controlado.



Fonte: autor.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, que é uma pesquisa básica, fruto de um trabalho de iniciação científica, foi proposta uma nova metodologia de sistema de controle chaveado para sistemas lineares com incertezas politópicas. A metodologia generaliza Souza et al., (2013) ao não exigir que a matriz B , do sistema (7), seja constante. Além disso, em termos de conservadorismo, as LMIs propostas são iguais às estabelecidas em Souza et al. (2013), que por sua vez, já são mais relaxadas do que as clássicas propostas em (Boyd et al., 1994), e na Figura 1 mostra que a resposta do sistema controlado (20), (21), (22) e (16) apresentou um desempenho apropriado. Como prosseguimento deste trabalho, pretende-se estabelecer, seguindo esta mesma linha de projeto de controle, critérios de desempenho como, por exemplo, H_2 e H_∞ .

REFERÊNCIAS

BOYD, S. et al. Linear matrix inequalities in system and control theory. 2. ed. Philadelphia: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. v. 15.

DECARLO, R. A. et al. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. Proceedings of the IEEE, v. 88, n. 7, p. 1069–1082, jul. 2000.

GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Philadelphia, v. 45, n. 5, p.1915–1930, dec. 2006.

HESPANHA, J. P.; MORSE, A. S. Switching between stabilizing controllers. *Automatica*, Amsterdam, v. 38, n. 11, p. 1905–1917, nov. 2002.

LEITE, V. J. S. et al. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *Controle e Automação*, v. 15, n. 1, p. 24 – 40, Jan. 2004.

LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems*, New York, v. 19, n. 5, p. 59–70, oct. 1999.

LOFBERG, J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN*, 2004, Taipei. *Proceedings...* Taipei: IEEE, 2004. p. 284–289.

OLIVEIRA, D. R. de et al. Projeto de controle robusto H1 chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa. In: . Belo Horizonte: [s.n.], 2014. v. 2014, p. 8.

ŠILJAK, D. D.; STIPANOVIC, D. M. Robust stabilization of nonlinear systems: the LMI approach. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 6, n. 5, p. 461–493, jun. 2000.

SILVA, J. H. P. et al. Controle H1 com chaveamento do ganho da realimentação do vetor de estado para sistemas lineares incertos. In: *CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA*. Anais ...Campina Grande, 2012.

SOUZA, W. A. et al. Projeto e implementação de um controlador robusto chaveado utilizando modelos fuzzy takagi-sugeno. In: . Belo Horizonte: [s.n.], 2014. v. 2014, p. 8.

SOUZA, W. A. et al. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2013, p. 10, apr. 2013.

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, Essex, v. 11–12, p. 625–653, 1999.

WICKS, M. A.; PELETIES, P.; DECARLO, R. A. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In: *CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL*, 33., 1994, Lake Buena Vista. *Proceedings...* Lake Buena Vista: IEEE, 1994. v. 4, p. 3492–3497.