

## AUTOVALORES E SUA IMPORTÂNCIA NA TEORIA DE CONTROLE

Thiago Sousa Bezerra<sup>1</sup>, Amanda Vieira da Silva<sup>2</sup>, Rafael Pimenta Alves<sup>3</sup>, Wallysonn Alves de Souza<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Eletrotécnica – IFTO, Campus Palmas. e-mail: <thiago.sousaif@gmail.com>

<sup>2</sup>Licencianda em Matemática – IFTO, Campus Palmas. Bolsista do CNPq. e-mail: <amandavieirawj@gmail.com>

<sup>3</sup>Licenciando em Matemática – IFTO, Campus Palmas. e-mail: <rafaelpa62@gmail.com>

<sup>4</sup>Matemático e Doutor em Engenharia Elétrica – IFTO, Campus Palmas. <wallysonn.souza@ifto.edu.br>

**Resumo:** Este trabalho aborda um estudo sobre matrizes, autovalores e autovetores, dando ênfase nas definições e suas principais propriedades. Realizou-se uma pesquisa bibliográfica em livros especializados no tema. A ideia do trabalho é destacar as propriedades dos autovalores que fundamentam a teoria de controle, principalmente com projeto baseado em Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês “*Linear Matrix Inequalities – LMIs*”).

**Palavras-chave:** Controle, Matrizes, Autovalores, Autovetores

### 1 INTRODUÇÃO

A teoria de controle, que trata do comportamento de sistemas dinâmicos, tem se destacado como um importante campo de aplicações da matemática e vem sendo amplamente utilizada na sociedade moderna, desde simples aplicações, como no controle de temperatura de ar-condicionado, até em sistemas altamente sofisticados, como em aviões e satélites.

Assim, devido ao grande número de aplicações, o interesse no estudo de problemas vinculados à teoria de controle tem crescido, e grande parte desses estudos foi inspirado pelo uso das Desigualdades Matriciais Lineares que aqui serão chamadas de LMIs (do inglês “*Linear Matrix Inequalities - LMIs*”), que é uma técnica mais moderna de análise e projeto de sistema de controle, no domínio do tempo, que utiliza a descrição de um sistema em termos de  $n$  equações diferenciais que podem ser escritas na forma matricial.

Segundo Boyd et al. (1994), a história das LMIs na análise de sistemas dinâmicos remonta há mais de 100 anos, e começa em cerca de 1890, quando Lyapunov publicou seu trabalho introduzindo o que hoje chamamos de teoria de Lyapunov. Naquela época, o teorema de Lyapunov, adaptado para sistemas lineares contínuos no tempo, poderia ser formulado diretamente em termos de LMIs. Mas, principalmente na década de 1980, foram abertos caminhos para que problemas de controle pudessem ser convertidos em problemas convexos como, por exemplo, o trabalho de Bernussou, Peres e Geromel (1989). A partir

daí, garantir que um sistema linear realimentado seja estável é equivalente a encontrar um ganho (matriz) estabilizante  $K$  e uma matriz de Lyapunov  $P$  simétrica positiva definida.

Busca-se com este trabalho o estudo da fundamentação matemática, uma vez que para qualquer sistema dinâmico a ser controlado é necessário um modelo matemático preciso, e, ao desenvolver técnicas de sistema de controle é fundamental que se entenda o papel da matemática em sua fundamentação. Assim, a principal contribuição do trabalho é na fundamentação matemática para se chegar na matriz de Lyapunov  $P$ .

## 2 METODOLOGIA

Este é um trabalho de pesquisa bibliográfica, no qual inicialmente como estudo preliminar focou-se em matrizes, suas principais características seguindo a linha de Steinbruch e Winterle (1987) e Leon (2011).

Define-se por matriz um conjunto de valores organizados em  $m$  linhas e  $n$  colunas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Sendo  $a_{ij}$  um elemento da matriz, seus índices  $i$  e  $j$  indicam respectivamente, a linha em que ele se encontra e a coluna. É dito que a matriz, por possuir  $m$  linhas e  $n$  colunas, possui ordem  $m \times n$ .

Matrizes retangulares são matrizes no qual o número de linhas é diferente dos números de colunas, ou seja,  $m \neq n$ . Matrizes em que  $m = n$  são chamadas de matrizes quadradas.

Define-se por matriz transposta de uma matriz  $A$ , de ordem  $m \times n$ , a matriz  $A^T$ , de ordem  $n \times m$ , obtida através da permutação entre as linhas e colunas de mesmo índice.

Sendo  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$  sua transposta será  $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

Define-se como matriz simétrica, sendo dada a matriz quadrada  $A$ , a matriz em que  $A = A^T$ , ou seja uma matriz que é igual à sua transposta. Sendo uma matriz  $A$  simétrica, seus índices  $a_{ij}$  dispostos simetricamente em relação a diagonal principal, vale que  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Dentre das matrizes simétricas existem as chamadas matrizes simétricas positivas definidas, que seguem relação no qual a matriz  $A$ , em sua forma simétrica  $f(x) = x^T A x$ , é definida se esta estiver apenas um sinal quando representa todos os vetores não-nulos em  $R^n$ .

Por definição, se  $A$  é uma matriz simétrica positiva então  $A$  é não singular, uma vez que, se  $A$  fosse singular, assumiria um valor nulo como um autovalor, mas uma vez que todos os autovalores de  $A$  são positivos  $A$  é não-singular.

### 3 RESULTADOS PRINCIPAIS: AUTOVALORES E AUTOVETORES

**Definição 1:** Seja  $T: V \rightarrow V$  um operador linear. Um vetor  $v \in V$ , em que  $v \neq 0$  é o autovetor do operador  $T$  se existir  $\lambda \in C$  tal que  $T(v) = \lambda v$ .

O número  $\lambda$  é definido como o autovalor de  $T$  associado ao vetor  $v$ .

Da Definição 1, pode-se perceber que um vetor  $v \neq 0$  é o autovetor se a imagem  $T(v)$  for um múltiplo escalar de  $v$ . No  $R^2$  e  $R^3$  diríamos que  $v$  e  $T(v)$  têm a mesma direção. Assim, dependendo do valor de  $\lambda$ , o operador  $T$  dilata  $v$ , contrai  $v$ , inverte o sentido de  $v$  ou o anula no caso de  $\lambda = 0$ . Os autovetores também são chamados de vetores característicos ou vetores próprios e os autovalores também são chamados de valores característicos ou valores próprios.

#### 3.1 Determinação de Autovalores e Autovetores

Dado um operador linear  $T: R^n \rightarrow R^n$  que possui uma matriz na base canônica:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Se  $v$  é autovetor e  $\lambda$  autovalor do operador  $T$ , tem-se que:

$$Av = \lambda v, \text{ então } Av - \lambda v = 0$$

Sabendo que  $v = Iv$ , sendo  $I$  a matriz identidade de ordem  $n$  então:

$$Av - \lambda Iv = 0 \rightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

Essa equação que resulta em um sistema homogêneo, pois todas as equações são iguais a zero, e, portanto, admitem solução nos quais todas as variáveis são nulas.

Para que o sistema admita soluções não nulas, pois por definição  $v \neq 0$ , devemos impor  $\det(A - \lambda I) = 0$ , ou seja:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

A equação  $\det(A - \lambda I) = 0$  recebe o nome de equação característica do operador  $T$ , ou da matriz  $A$ , e suas raízes são os autovalores do operador. O determinante  $\det(A - \lambda I) = 0$  é um polinômio especial chamado de polinômio característico da matriz.

Os autovalores e autovetores possuem propriedades notáveis dentre as quais destacam-se as seguintes:

- Se  $v$  é um autovetor associado a um autovalor  $\lambda$  de um operador linear  $T$ , então qualquer vetor paralelo a  $v$  também é autovetor associado a  $\lambda$ .

- Se  $\lambda$  é um autovalor de um operador linear  $T:V \rightarrow V$ , o conjunto  $S_\lambda$  de todos os vetores  $v \in V$ , inclusive para  $v=0$ , é um subespaço vetorial de  $V$ .
- Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico, e, portanto, os mesmos autovalores.
- Os autovalores de uma matriz simétrica positiva definida são todos positivos e, de forma análoga, os autovalores de uma matriz simétrica negativa definida são todos negativos.

A última propriedade é de fundamental importância para garantir a estabilidade de um sistema linear  $\dot{x} = Ax$  com projetos baseados em LMIs, pois garantir que um sistema linear seja estável é equivalente a encontrar uma matriz  $P$  (matriz de Lyapunov) simétrica positiva definida, ou seja, com todos os autovalores positivos.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentado um breve estudo sobre matrizes, autovalores e autovetores, bem como suas principais propriedades. Estes resultados são básicos, mas fundamentais para o prosseguimento dos estudos em teoria de controle clássico ou moderna. Um prosseguimento desta pesquisa é na análise e síntese de sistemas de controle de sistemas lineares e não lineares com projetos baseados em LMIs, que é uma técnica moderna de projeto de controle.

Com relação a aplicabilidade, o controle automático possui uma grande importância em diversas áreas, seja industrial ou no campo, ou até mesmo no dia a dia das pessoas. Atualmente, sistemas de controle estão muito próximos das pessoas, como pode ser observado no ar-condicionado, relógios, alarmes entre outros.

## REFERÊNCIAS



BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v. 13, n. 1, p. 65–72, jul. 1989.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. 2. ed. Philadelphia: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. (SIAM Studies in Applied Mathematics, v. 15).

LEON, Steven J. **Álgebra Linear**: com aplicações. 8ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

STREINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. 2ª ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.