

CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES BASEADOS EM LMIS

Ana Flávia de Sousa Freitas¹, Amanda Viera², Wallysonn Alves³, Rafael Pimenta Alves⁴

¹Graduando do curso de Engenharia Elétrica - IFTO. Bolsista do CNPq. e-mail: <anafreitss97@gmail.com>

²Graduando do curso de Licenciatura em Matemática – IFTO. Bolsista do CNPq. e-mail: <amandavieirawj@gmail.com>

³Professor Doutor da Coordenação de Ciências Matemáticas e Naturais- IFTO. e-mail: <wallysonn.souza@ifto.edu.br>

⁴Licenciando em Matemática – IFTO, Campus Palmas. e-mail: <rafaelpa62@gmail.com>

Resumo: O trabalho apresenta um estudo sobre a análise de estabilidade e sistema de controle para sistemas lineares invariantes no tempo. Este método é baseado em Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês “Linear Matrix Inequalities– LMIs) e utiliza a função de Lyapunov quadrática para projetar os ganhos de realimentação do controlador. A simulação do sistema de controle de um sistema bola viga atesta a eficiência da metodologia.

Palavras-chave: controle de sistema linear, desigualdades matriciais lineares, LMIs, sistema bola-viga

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos o controle automático tem sido indispensável para o desenvolvimento da ciência e, particularmente, na engenharia devido a sua importância nos processos de produção industrial, tais como: no controle de pressão, temperatura, umidade, viscosidade e de vazão nos processos industriais, no projeto de sistemas de controle de piloto automático na indústria aeroespacial, no projeto de carros e caminhões na indústria automotiva, dentre outros. Assim, o estudo de problemas acoplados à teoria de controle tem crescido muito e boa parte destes estudos estão associados com análises de estabilidade e a projetos de novos controladores, e boa parte desses projetos são baseados em Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês “Linear Matrix Inequalities – LMI).

Segundo (BOYD et al., 1994), a história das LMIs na análise de sistemas dinâmicos remonta há mais de 100 anos, e começa em cerca de 1890, quando Lyapunov publicou seu trabalho introduzindo o que hoje chamamos de teoria de Lyapunov. Naquela época, o teorema de Lyapunov, adaptado para sistemas lineares contínuos no tempo, poderia ser formulado diretamente em termos de LMIs. Mas, principalmente na década de 1980 foram abertos caminhos para que problemas de controle pudessem ser convertidos em problemas convexos, como por exemplo, com o trabalho de (BERNUSSOU; PERES; GEROMEL, 1989). A partir daí, garantir que um sistema linear realimentado seja estável é equivalente a encontrar um ganho estabilizante K e uma matriz de Lyapunov P simétrica positiva definida. Além da simplicidade e consistência algébrica, uma das principais vantagens da metodologia baseada em LMIs é a facilidade de inclusão de incertezas no modelo, como as do tipo politópicas e índices de desempenho, como taxa de decaimento e restrição na entrada e saída da planta.

A principal contribuição deste trabalho é a análise e síntese de controle para sistemas lineares realimentados. Para mostrar a eficiência da metodologia proposta foram realizadas simulações computacionais do projeto de controle de um sistema bola-viga utilizando o *software* MATLAB.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

A estabilidade de um ponto de equilíbrio é usualmente caracterizada de Teoria de Lyapunov para sistemas. Uma das condições fundamentais na teoria de sistemas é a construção de funções de Lyapunov, tanto para análise de estabilidade quanto para a síntese de controladores.

Intuitivamente, a estabilidade de um sistema dinâmico está relacionada com a função energia deste sistema. Se a função *energia* do sistema é sempre positiva e decrescente com o tempo, as trajetórias tendem à origem (Khalil, 1996).

Considere o sistema linear autônomo, em que A é uma matriz simétrica definida positiva:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

(1)

O ponto de equilíbrio do sistema linear (1) é um ponto x_e , tal que, $\dot{x}(t) = 0$. Note que, no caso do sistema linear (1), $x_e = 0$.

Teorema 2.1 (Lyapunov). Dizemos que o ponto de equilíbrio $x_e = 0$ do sistema linear (1) é globalmente assintoticamente estável, se existe uma função $V: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 (função de Lyapunov) tal que:

- (i) $V(0) = 0$;
- (ii) $V(x) > 0$, $\forall x \in D$, $x \neq 0$;
- (iii) $\dot{V}(x) < 0$, $\forall x \in D$, $x \neq 0$.

A demonstração deste teorema pode ser vista, por exemplo, em (Boyd, 1994).

A forma mais simples de encontrar a função de Lyapunov é considerar a forma quadrática:

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$$

(2)

sendo P uma matriz simétrica positiva definida. Assim V pode ser escrita da seguinte forma:

$$V(x) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Teorema 2.2 *Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio $x=0$, do sistema linear (1), seja assintoticamente estável é que exista uma matriz P , simétrica positiva definida ($P > 0$), tal que:*

$$A^T P + PA < 0$$

(3)

A demonstração pode ser vista em (BOYD et al., 1994).

A equação (3) é uma LMI. Para a demonstração do Teorema 2.2, utiliza-se a função quadrática de Lyapunov:

$$V(x) = x^T P x.$$

(4)

Sendo que P é uma matriz constante, real simétrica positiva definida e exigindo a condição $\dot{V}(x) < 0$, para todo x . Isto é equivalente a determinarmos uma matriz $P = P^T > 0$ e, se existir essa matriz P , podemos dizer que o sistema dinâmico é quadraticamente estável.

Agora, considere o sistema linear realimentado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (6)$$

sendo $x \in R^n$ o vetor de estado, $u \in R^{m \times n}$ a entrada de controle, $A \in R^{n \times n}$ e $B \in R^{m \times n}$.

Suponha que todas as variáveis de estado estejam disponíveis para realimentação, uma lei de controle largamente usada na literatura é dada por:

$$u = -Kx(t), \quad K \in R^{m \times n}.$$

(7)

Substituindo (7) em (6), temos:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t) = (A - BK)x(t)$$

(8)

que é o sistema realimentado.

3 RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção vamos apresentar um teorema que garante a estabilidade do sistema linear realimentado (8).

Teorema 3.1 *O sistema linear dado em (8) é quadraticamente estabilizável se, e somente se, existem uma matriz simétrica positiva definida $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que*

$$X A^T + A X - B M - M^T B^T < 0$$

(9)

Se (9) é factível, o ganho do controlador é dado por $K = M X^{-1}$.

A demonstração do Teorema 3.1 pode ser vista em (Bernussou, Peres e Geromel, 1989).

O Teorema 3.1 garante a estabilidade do sistema realimentado (9), isto é, garantir que o sistema linear realimentado (9) seja estável é equivalente a encontrar um ganho estabilizante K e uma matriz de Lyapunov P simétrica positiva definida. A seguir, vamos ilustrar a metodologia projetando um sistema de controle para o sistema bola-viga.

3.1 Sistema bola-viga

O sistema bola-viga é um sistema não-linear e instável em malha aberta. Este é um importante modelo no aprendizado de engenharia e sistemas de controle pois permite que inúmeras técnicas de controle possam ser estudadas e pesquisadas (DAMAZO, 2008).

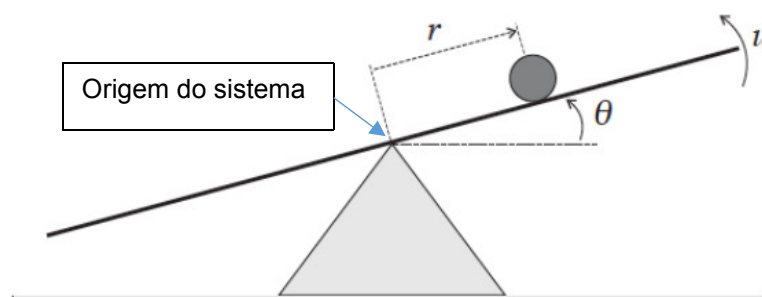


Figura 1 – Sistema Bola-viga. Fonte: Cardim (2009).

Para exemplificar, será projetado um sistema de controle para um sistema bola-viga, ilustrado na Figura 1, e que segue o modelo matemático, linearizado, estabelecido em (WANG,1996):

$$\begin{cases} \tau \dot{\theta} + \theta(t) = k v_m(t) \\ \dot{x} = k_{bb} \theta(t) \end{cases}$$

(8)

Em que,

- $k_{bb} = 1,3 m/s^2$;
- $k = 1,76 \frac{rad}{s}$;
- $\tau = 0,0285 s$;
- x : posição da bola;
- θ : ângulo da viga em relação ao solo (posição angular);
- u : torque aplicado na barra e o sinal de controle.

Assim, o sistema (8) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k}{\tau} \end{bmatrix} v_m(t)$$

(9)

Definindo,

$$\begin{cases} x(t) = x_1(t) \\ \theta(t) = x_3(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_3(t) = x_4(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t) \\ \dot{x}_4 = \dot{x}_3(t) = \dot{\theta}(t) \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = x_1(t) \\ \dot{x}(t) = x_2(t) \\ \theta(t) = x_3(t) \\ \dot{\theta}(t) = x_4(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = k_{bb} x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{-1}{\tau} x_4(t) + \frac{k}{\tau} u(t) \end{cases}$$

Daí o sistema (9) pode ser escrito:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{\tau} \end{bmatrix} u$$

(10)

3.2 Simulações

O objetivo da simulação do sistema de controle é conservar a bola na origem. Considerou-se a condição inicial da bola, $x_0 = [0, 4000 \quad -0, 5000 \quad 0, 1000 \quad 0]^T$ e o ponto de equilíbrio definido por $x_e = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$, a simulação do sistema controlado apresentou as respostas ilustradas na Figura 2. Utilizando as matrizes A e B do sistema (10) no Teorema 3.1, foram obtidos os valores para a matriz simétrica definida positiva P e o ganho do controlador K :

$$P = \begin{bmatrix} 1,6118 & 2,1934 & 2,5850 & 0,7629 \\ 2,1934 & 6,0555 & 5,9041 & 2,2958 \\ 2,5850 & 5,9041 & 8,3044 & 2,7049 \\ 0,7629 & 2,2958 & 2,7049 & 1,6878 \end{bmatrix}$$

$$K = [0,0427 \quad 0,1034 \quad 0,1611 \quad -0,5110]$$

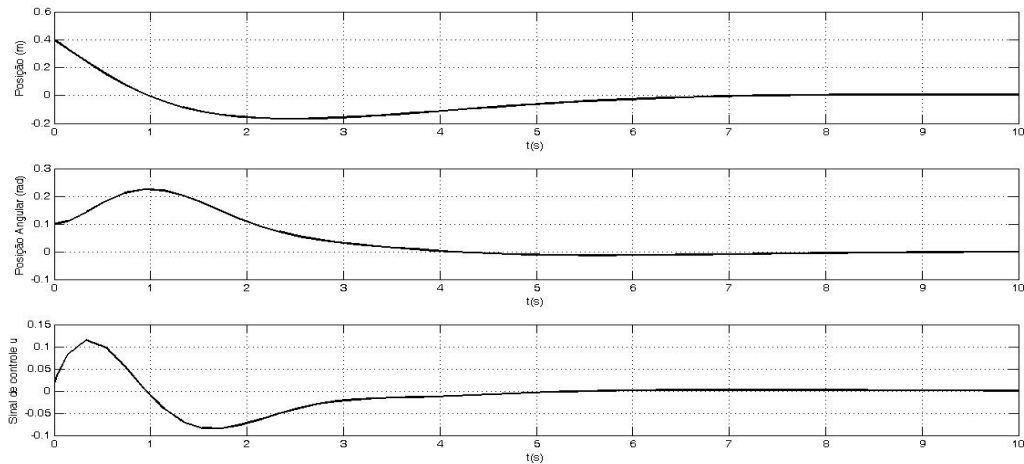


Figura 2 – Variáveis de estado $x_1(t)$ posição da bola, $x_3(t)$ posição angular e sinal de controle u .

Note na Figura 2 que o controlador aqui definido apresenta um bom desempenho, conseguindo levar a bola para a origem em aproximadamente 7 segundos e utilizando pouco esforço de tensão elétrica. Este desempenho pode ser melhorado utilizando, por exemplo, taxa de decaimento que será explorado em trabalhos futuros.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia de análise e projeto de sistema de controle de sistemas lineares, baseados em LMIs.

Para confirmar a metodologia proposta foi projetado e simulado o sistema de controle de um sistema bola-viga. Como pode ser visto na Figura 2, o sistema apresenta um bom desempenho, mas pode ser melhorado inserindo índice de desempenho como, por exemplo, taxa de decaimento. Trabalhos futuros pretendem explorar esse índice de desempenho e, além disso, pretende-se projetar controle mesmo com incertezas na planta.

REFERÊNCIAS

BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. **A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems**. Systems & Control Letters, Amsterdam, v. 13, n. 1, p. 65–72, jul. 1989.



BOYD, Stephen. et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia: SIAM, 1994.

CARDIM, R. **Projeto de Controladores Baseados em LMIs: realimentação derivativa e sistemas chaveados utilizando estrutura variável**. 2009. 120 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.
Disponível em:
<http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/bis/33004099080P0/2009/cadim_r_dr_ilha.pdf>.
Acesso em: 15 agost. 2017.

DAMAZO, G. A. **Controle com Modos Deslizantes Aplicado em Sistemas com Atraso e Acesso Somente à Saída**. 2008. 94 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, Ilha Solteira, 2008.

WANG, L.-X. **A course in fuzzy systems and control**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.