

## FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES BASEADOS EM LMIs

Amanda Vieira da Silva<sup>1</sup>, Ana Flávia de S. Freitas<sup>2</sup>, Wallysonn Alves de Souza<sup>3</sup>, Rafael Pimenta Alves<sup>4</sup>,  
Saulo Oliveira Macedo<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Licencianda em Matemática – IFTO, Campus Palmas . Bolsista do CNPq. e-mail: <amandavieirawj@gmail.com>

<sup>2</sup>Graduanda em Engenharia Elétrica – IFTO, Campus Palmas . Bolsista do IFTO. e-mail: <anafreitss97@gmail.com>

<sup>3</sup>Matemático e Doutor em Engenharia Elétrica – IFTO, Campus Palmas. e-mail: <wallysonn.souza@ifto.edu.br>

<sup>4</sup>Licenciando em Matemática – IFTO, Campus Palmas . e-mail: <rafaelpa62@gmail.com>

<sup>5</sup>Licenciando em Matemática – IFTO, Campus Palmas . e-mail: <saulo111@gmail.com>

**Resumo:** Esta pesquisa estudou os fundamentos matemáticos da teoria de controle de sistemas lineares, com projetos baseados em desigualdades matriciais lineares (do inglês “*Linear Matrix Inequalities* – LMIs”), proporcionando um desenvolvimento científico, o que pode ser revertido no desenvolvimento de novas técnicas de análise e síntese de controle das existentes. Se tratou de uma pesquisa bibliográfica sobre questões relativas à estabilidade no sentido de Lyapunov e controle de sistemas lineares baseado em desigualdades matriciais lineares. Para ilustrar, foi dada uma perspectiva do sistema de controle, baseado em LMIs, para o sistema Bola-Viga.

**Palavras-chave:** Estabilidade, Sistemas de Controle, LMIs

### 1 INTRODUÇÃO

A pesquisa realizada tem como estudo os fundamentos matemáticos da teoria de controle de sistemas lineares, com projetos baseados em desigualdades matriciais lineares (LMIs), sigla que vem da expressão do inglês *Linear Matrix Inequalities*. A teoria de controle que trata do comportamento de sistemas dinâmicos tem se destacado como um importante campo de aplicações da matemática e vem sendo amplamente utilizada na sociedade moderna, desde simples aplicações até em sistemas altamente sofisticados. Assim, devido ao grande número de aplicações, o interesse no estudo de problemas vinculados à teoria de controle tem crescido e grande parte desses estudos foi inspirado pelo uso das LMIs, que é uma técnica moderna de análise e projeto de sistema de controle, no domínio do tempo, que utiliza a descrição de um sistema em termos de  $n$  equações diferenciais que podem ser escritas na forma matricial.

Para um sistema dinâmico qualquer ser controlado, é importante que tenhamos um modelo matemático preciso e, ao desenvolver técnicas de sistema de controle, sejam elas clássicas ou modernas, é imprescindível que se perceba a importância da Matemática para sua fundamentação. Com essa visão, destacamos conceitos fundamentais do Cálculo e da Álgebra Linear necessários para a compreensão e formulação dos problemas baseados em LMIs. A principal contribuição deste trabalho é o desenvolvimento científico, no sentido de estabelecer as propriedades e/ou teorias

matemáticas que fundamentam a teoria de controle de sistemas lineares, com projetos baseados em LMIs.

## **2 METODOLOGIA**

O trabalho realizado foi uma pesquisa científica, elaborada a partir do método de pesquisa bibliográfica. Ele foi desenvolvido na cidade de Palmas, Tocantins, especificamente no IFTO, campus Palmas. Num primeiro momento, foi importante realizar um estudo, baseado em (STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P, 1987) e (LEON, 2011) e aprofundamento de conceitos preliminares, como: matrizes; tipos de matrizes; matrizes simétricas; matrizes simétricas positivas definidas e suas propriedades; autovalores e autovetores; sistemas de equações diferenciais lineares; Complemento de Schur; e definição de LMIs e suas propriedades. A partir desses conceitos, foi possível avançar para o estudo sobre Estabilidade e compreender melhor a importância da pesquisa em questão e sua aplicabilidade. Para ilustrar, foi realizado um estudo sobre o sistema Bola-Viga com a perspectiva de, em trabalhos futuros, projetar um sistema de controle baseado em LMIs para o mesmo.

## **3 CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES**

### **3.1 Estabilidade de Sistemas Lineares**

Nos últimos anos o controle automático tem sido fundamental no desenvolvimento da ciência e, em particular, na engenharia, devido a sua importância no processo de produção industrial como, por exemplo: no controle de pressão, de temperatura, no projeto de sistemas de controle de piloto automático na indústria aeroespacial, na indústria automotiva, dentre outros. Assim, o estudo de problemas vinculados à teoria de controle tem crescido muito e boa parte desses estudos estão relacionados com a análise de estabilidade e a projetos de novos controladores.

Um dos tópicos que merece destaque na pesquisa é a estabilidade de sistemas lineares. O conceito de estabilidade é crucial na síntese de sistemas de controle realimentados. A estabilidade do estado (ou estabilidade interna) é definida pelo comportamento das trajetórias do vetor de estados para entrada constante (em geral nula) e condições iniciais em torno do ponto de equilíbrio (estabilidade local). Intuitivamente, a estabilidade de um sistema dinâmico está relacionada com a função energia deste sistema. Se a função energia do sistema é sempre não negativa e decresce com relação ao tempo, as trajetórias tendem à origem (KHALIL, 1996).

Usualmente, utilizamos a teoria de Lyapunov para estudar a estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema. Considere o sistema linear autônomo:

$$\dot{x} = Ax \quad (1)$$

O ponto de equilíbrio do sistema acima é um ponto  $x_e$ , tal que  $\dot{x} = 0$ , ou seja,  $Ax_e = 0$ . Note que, no caso do sistema linear (1), se  $A$  é não singular  $x_e = 0$ .

Um ponto de equilíbrio pode ser estável ou instável. Caso estável, ele pode ser *estável*, *assintoticamente estável*, *globalmente estável* ou *globalmente assintoticamente estável*.

A teoria de Lyapunov garante que, para sistemas invariantes no tempo, o ponto de equilíbrio  $x_e$  é *estável* se para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que, para toda condição inicial  $x_0 = x(0)$

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon$$

A Figura 1 ilustra o comportamento da solução de um sistema estável no sentido de Lyapunov.

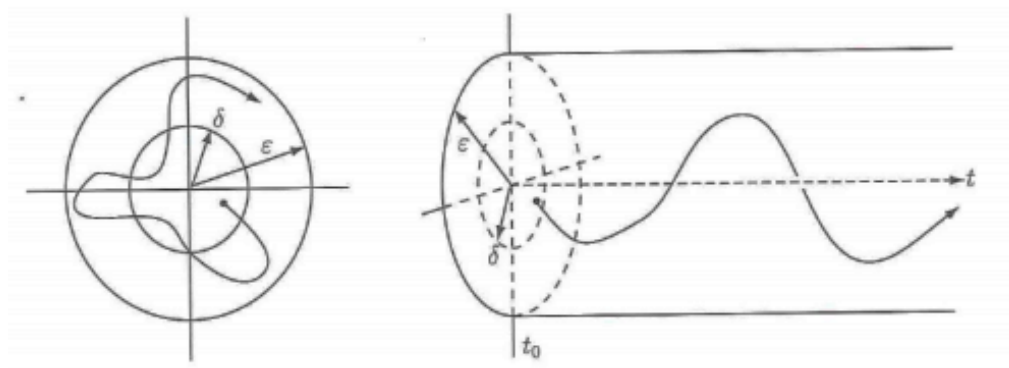


Figura 1 – Solução de um sistema estável no sentido de Lyapunov

Caso contrário, dizemos que o ponto de equilíbrio é *instável*.

Em termos mecânicos, pode-se dizer que um objeto está em equilíbrio estável se, quando empurrado, retorna ao seu ponto inicial depois de suspender o impulso. Note que na Figura 2 contém um sistema estável e instável, respectivamente. Percebe-se que o objeto do segundo sistema não retorna ao seu ponto inicial, caracterizando um sistema instável.

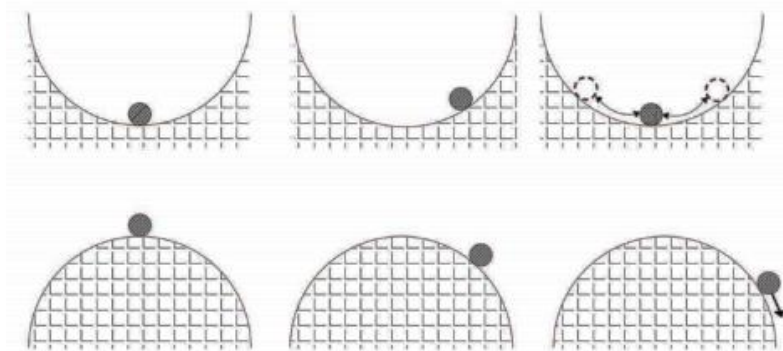


Figura 2 – Estável, mecanicamente, no sentido de Lyapunov

Um ponto de equilíbrio  $x_e$ , do sistema (1), é *assintoticamente estável*, no sentido de Lyapunov, se ele for estável e existir  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que:

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$$

A Figura 3 ilustra o comportamento da solução de um sistema assintoticamente estável.

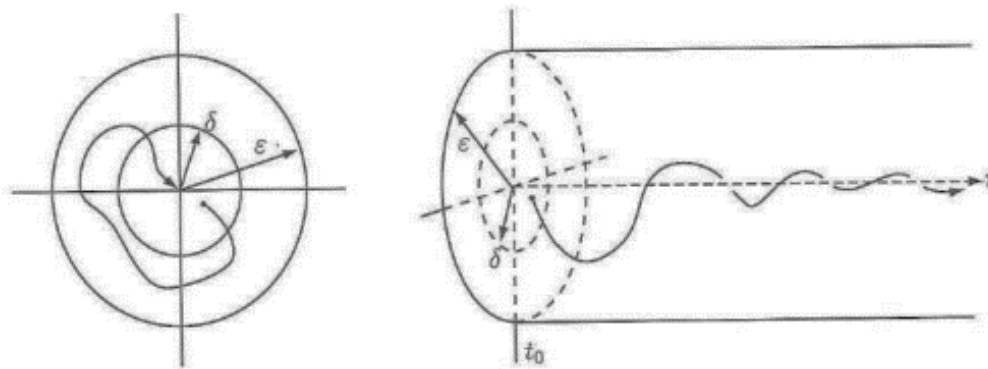


Figura 3 – Solução de um sistema assintoticamente estável

Dizemos que o ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  do sistema (1) é *globalmente assintoticamente estável*, se existe uma função (função de Lyapunov), de classe  $C^1$ ,

$$S: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que:

i)  $S(0) = 0$ ;

ii)  $S(x) > 0, \forall x \in D, x \neq 0$ ;

iii)  $\dot{S}(x) < 0, \forall x \in D, x \neq 0$ .

Logo, o ponto de equilíbrio  $x_e$  é globalmente assintoticamente estável se, além de ser estável, tem-se:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$$

Obviamente, prefere-se um sistema globalmente assintoticamente estável, uma vez que o ponto de equilíbrio sempre a de convergir para a origem, independentemente do ponto inicial, proporcionando melhor desempenho.

Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (1) seja globalmente assintoticamente estável é que exista uma matrix  $P$ , simétrica positiva definida, tal que (BOYD et al., 1994)

$$A^T P + P A < 0$$

A equação acima é uma LMI. Ela é uma ferramenta matemática amplamente aplicada em teoria de controle. O uso de LMIs na teoria de controle começou a se desenvolver a partir da década de 80, com a criação e aperfeiçoamento de algoritmos de otimização convexa, como pontos interiores (TROFFINO, 2000). A partir de então, muitos dos resultados usuais da teoria de controle e sistemas estão sendo reescritos como LMIs. A grande vantagem de se trabalhar com esta técnica é que estas desigualdades possuem propriedades importantes, como convexidade e linearidade, para tratar problemas mistos de desempenho e robustez. Além disso, já existem no mercado pacotes computacionais eficientes para se resolver problemas envolvendo LMIs. Como os problemas não se apresentam na forma de LMI, algumas ferramentas matemáticas são necessárias para se obter a formulação do problema. Podemos citar como uma dessas ferramentas o Complemento de Schur, devido à sua importância na conversão, em LMIs, de certas desigualdades matriciais não-lineares, além do seu papel em diversas áreas da matemática e engenharia, em geral em problemas que envolvem a solução de sistemas de equações diferenciais.

### 3.2 Aplicação: Sistema Bola e Viga

O sistema Bola e Viga é um sistema não-linear e instável em malha aberta. Este é um importante modelo no aprendizado de engenharia e sistemas de controle e permite que inúmeras técnicas de controle possam ser estudadas e pesquisadas (DAMAZO, 2008).

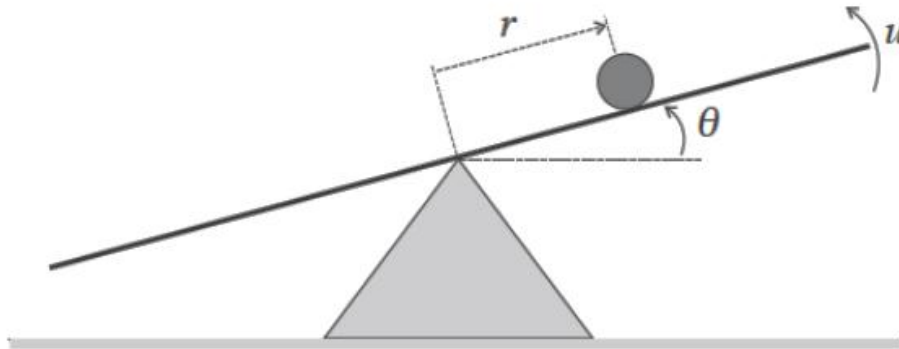


Figura 4 – O sistema bola e viga

Na Figura 4 é representado um sistema bola e viga. Trata-se de uma bola que rola livremente sobre a superfície de uma viga. A viga é acoplada na saída do eixo de um motor elétrico DC (do inglês *direct current*) e então ela pode ser girada em torno de seu eixo central (ângulo  $\theta$ ) pela ação de um sinal de controle elétrico (entrada  $u$ ), que é amplificado e aplicado ao motor DC, gerando por fim um deslocamento  $r$  da bola. A posição da bola na viga pode ser medida através de um sensor especial. O trabalho do controle é o de regular automaticamente a posição da bola na viga apenas pela alteração do ângulo da viga. Existe uma dificuldade para se efetuar o controle, porque a bola não permanece em um lugar fixo, mas se move com uma aceleração que é proporcional ao giro da viga. O sistema é instável a malha aberta porque a saída do sistema (a posição da bola) aumenta sem limite para uma entrada fixa (ângulo da viga). Assim, um sistema de controle por realimentação pode ser utilizado para manter a bola em uma posição desejada sobre a viga.

#### 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O principal resultado deste trabalho foi o desenvolvimento científico proporcionado, que possibilitou o entendimento das principais propriedades e teorias matemáticas que fundamentam a teoria de controle de sistemas lineares, com projetos baseados em LMIs, podendo ser revertidas em aplicações e implementações de diferentes grau de complexidade. Uma das possibilidades de aplicação da teoria (LMIs) é no projeto de um sistema de controle para o Bola e Viga, um dos mais populares e importantes modelos laboratoriais presentes no aprendizado de sistemas de controle. Ele é amplamente utilizado por ser um sistema de fácil compreensão e, conseqüentemente, permite que inúmeras técnicas de controle, clássicas ou modernas, sejam estudadas.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi realizada uma pesquisa básica sobre a teoria de Lyapunov e suas consequências na análise e projeto de sistemas de controle de sistemas lineares, baseados em LMIs. Para ilustrar a pesquisa, realizou-se um estudo do sistema Bola-Viga com a perspectiva de se projetar um sistema de controle baseado em LMIs.

## REFERÊNCIAS

- BOYD, Stephen. et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia: SIAM, 1994.
- DAMAZO, G. A. **Controle com Modos Deslizantes Aplicado em Sistemas com Atraso e Acesso Somente à Saída**. 2008. 94 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, Ilha Solteira, 2008.
- KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. Prentice – Hall New Jersey.
- LEON, Steven J. **Álgebra Linear: com aplicações**. 8ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1943.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. 2ª ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.
- TROFFINO, A. **Controle Robusto**. Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.